Singuläre Integrale vom Bochner-Riesz Type

Dissertation

Universität Siegen

1990

Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung von Faltungsoperatoren auf $\mathbf{R}^n$, die mittels der Fourier-Transformation definiert sind durch

$$\widehat{Tf} = m\hat{f} \qquad (f \ eine \ Testfunktion).$$

Wir stellen uns die Frage, unter welchen Bedingungen an den Multiplikator $m \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ der Operator T auf $L^p(\mathbf{R}^n)$ beschränkt ist; wir schreiben dann $m \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^n)$. Die Frage, in dieser Allgemeinheit gestellt, ist wohl kaum beantwortbar, denn abgesehen von dem Fall $p = 2$, in dem uns der Satz von Plancherel zur Hand liegt, hängt das L^p-Verhalten von T sehr stark von den Singularitäten der Funktion m ab. Der heute bestverstandene Typ von Singularitäten sind jene einer homogenen Funktion $m \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ vom Grade 0, $m \neq const.$ In diesem Fall hat m zwei singuläre Punkte, 0 und ∞. Die zugeordneten Faltungsoperatoren sind die klassischen singulären Integrale, sie sind beschränkt auf $L^p(\mathbf{R}^n)$, für $1 < p < \infty$ [St 70, Jou 87]. In einer Dimension erfüllt nur die Funktion $i\, sign(x)$ obige Bedingung. Der entsprechende Faltungsoperator ist die Hilbert-Transformation

$$Hf(x) = p.v. \int_{\mathbf{R}} \frac{f(x-t)}{t} \quad dt.$$

Betrachten wir den Multiplikator $m(x, y) = sign(x)\, sign(y)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, so ist m singulär auf den Koordinatenachsen, d.h. auf einer eindimensionalen flachen Teilmenge des $\mathbf{R}^2$. Die Beschränktheit des entsprechenden Faltungsoperators auf $L^p, 1 < p < \infty$, erhält man, indem man sich von der einfachen Tatsache überzeugt, daß $\mathbf{M}_p$ eine Algebra bezüglich punkt-weiser Multiplikation ist. Wesentlich schwieriger zu behandeln sind Multi-plikatoren deren Singularitäten auf einer gekrümmten Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ liegen. Solche Situationen treten zum Beispiel auf, wenn man die Riesz-Mittel von Spektralentwicklungen elliptischer Pseudodifferentialoperatoren untersucht: Ist $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ eine positive und homogene Funktion vom Grade 1, so haben die zu $\psi(D)$ assoziierten Riesz-Mittel vom Index $\alpha > 0$ die Form

$$S_R^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} (1 - \frac{\psi(y)}{R})_+^\alpha \quad e^{ixy} \quad \hat{f}(y) \quad dy. \tag{0.1}$$

Es konvergiert dann $S_R^\alpha f \to f$ in L^p genau dann, wenn $(1-\psi)_+^\alpha \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^n)$ ist. Dies ist im wesentlichen äquivalent zur Frage, ob die Funktion $dist(x, \{\psi = 1\})^\alpha$ *multipliziert mit einem* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ in $\mathbf{M}_p$ liegt.

Wir werden in dieser Arbeit Multiplikatoren des folgenden Typs betrachten:

(0.2) Es sei $M \subset \mathbf{R}^n$ eine C^∞-Untermannigfaltigkeit und $m \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n \backslash M)$. Für Punkte nahe M besitze m eine Singularität der Form $dist(x, M)^\alpha, \alpha > 0$.

Für den Fall, daß M eine Hyperfläche ist, welche eine kompakte Menge berandet, setzen wir m außerhalb dieser Menge auf Null und schreiben dafür $dist_+(x,M)^\alpha$.

Prototyp der zuletzt beschriebenen Situation ist der Bochner-Riesz-Multiplikator zum Index $\alpha > 0 : m_\alpha(x) = (1-|x|^2)_+^\alpha = dist_+(x,S^{n-1})^\alpha\, multi-pliziert\ mit\ einem\ \widetilde{m} \in \mathbf{M}_1$. Für ihn ist folgendes bekannt:

S. Bochner [Bo 36]:

(0.3) $\qquad m_\alpha \in \mathbf{M}_1(\mathbf{R}^n) \Longleftrightarrow \alpha > \frac{n-1}{2}$

C. Herz [He 54]:

(0.4) $\qquad m_\alpha \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^n) \Longrightarrow \alpha = \alpha(p) > \max\{ n \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| - \frac{1}{2}, 0\}$

C. Fefferman [C. Fe 71]:

$$p = 2 \Longleftrightarrow m_0 = \chi_{\{|x| \le 1\}} \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^n),\ n \ge 2 \tag{0.5}$$

L. Carleson und S. Sjölin [C-S 72], L. Hörmander [Hö 73], C. Fefferman [C. Fe 73]:

$$m_\alpha \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^2) \Longleftrightarrow \alpha(p) > \max\{ 2 \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| - \frac{1}{2}, 0\} \tag{0.6}$$

C. Fefferman [C. Fe 70], E.M. Stein [C. Fe 73], P. Tomas [To 74]:

$$m_\alpha \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^n) \Longleftrightarrow \alpha(p) > n \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| - \frac{1}{2} \text{ und } 1 \le p \le \frac{2(n+1)}{n+3} \tag{0.7}$$

Für den Grenzfall $\alpha(p) = n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}) - \frac{1}{2}$, $1 \le p < \frac{2(n+1)}{n+3}$, wurde in [Ch1 88] und [Ch2 87] gezeigt, daß die Bochner-Riesz-Mittel zum Index α *weak type* (p,p) sind. Für die Riesz-Mittel (0.1) wurde in [Ch-So 88] unter anderem gezeigt, daß sie für $\alpha = \frac{n-1}{2}$ *weak typ*$(1,1)$ sind und daß die in (0.4) angegebene Bedingung auch in diesem Fall notwendig ist. Eine Schwierigkeit bei der Behandlung der Frage, ob $(1-\psi)_+^\alpha \in \mathbf{M}_p$ ist, liegt darin begründet, daß im allgemeinen die Untermannigfaltigkeit $\{\psi = 1\}$ in einigen Punkten eine verschwindende Gaußsche Krümmung haben kann. Eine besondere Schwierigkeit bilden die Fälle, in denen die Gaußsche Krümmung von unendlicher Ordnung verschwindet. Hier gibt es nur in zwei Dimensionen eine

befriedigende Antwort [Sj 74]: (0.4) ist hinreichend für $n = 2$.
Man vermutet nun, daß für $\alpha > 0$ die notwendige Bedingung (0.4) auch für $n \geq 3$ hinreichend ist (für $\alpha = 0$ gilt das Analogon zu (0.5), wie man leicht aus dem de Leeuwschen Resultat [Jo 71] erhält: Es ist $\mathbf{M}_p(\mathbf{R}^k) \cap C(\mathbf{R}^n) \subset \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^n), \mathbf{R}^k \cong \{0\} \times \mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^n$). Dafür spricht folgendes: Betrachtet man die Frage für die flache Menge M = *Rand des Einheitsquaders*, d.h. die iterierten eindimensionalen Riesz-Mittel, so ist $dist_+(x, M)^\alpha \in \mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}_p$ für $\alpha > 0$. Das kann man etwa so interpretieren: je weniger gekrümmt M ist, desto eher sollte $dist_+(x, M)^\alpha \in \mathbf{M}_p$ sein. Jedoch macht es im allgemeinen Schwierigkeiten, M derart in "flache" und "gekrümmte" Teile zu zerlegen, daß man nach "Zusammensetzen" der Teile $dist_+(x, M)_+^\alpha \in \mathbf{M}_p$ erhält. Wir werden hier unter anderem zeigen, daß falls für M eine (L^{p_0}, L^2)-Restriktionsungleichung für die Fourier-Transformation gilt,

$$\|\hat{f}\|_{L^2(M)} \leq C \, \|f\|_{L^{p_0}(\mathbf{R}^n)},$$

so ist $dist_+(x, M)^\alpha \in \mathbf{M}_p$ für den Bereich (0.7) mit der zusätzlichen Einschränkung $1 \leq p \leq p_0$. Für den Spezialfall, in dem M auftritt als Einheitssphäre bezüglich einer anisotropen Dilatationsstruktur auf $\mathbf{R}^n$ (z.B.: $(x_1, \ldots, x_n) \to (t^{\alpha_1} x_1, \ldots, t^{\alpha_n} x_n), t > o, \alpha_i > 0$), wurde (0.7) mit der Einschränkung $p \leq p_0$ in [Da 82] gezeigt. Es ist bekannt, daß, falls ℓ der $n-1$ Hauptkrümmungen einer Hyperfläche M in einem einzigen Punkt von M verschwinden, $p_0 \leq \frac{2(n-\ell+1)}{n-\ell+3}$ ($< \frac{2(n+1)}{(n+3)}$ für $\ell > 0$) ist [Knapp, in To 74], [Gr 81], [Li 63], [Hl 50], [John 23].
Beginnen werden wir unsere Betrachtungen, indem wir aufzeigen, wie die Beweismethode von C. Fefferman für (0.6) in der vereinfachten Version von A. Cordoba [Co 79] auf $\mathbf{R}^n$ verallgemeinert werden kann und dort zu scharfen Ergebnissen für die Bochner-Riesz-Mittel auf $L^4(\mathbf{R}^n)$ führt. Unser Beweis macht klar, welcher Zusammenhang zwischen dem Maximaloperator

$$M_N f(x) = \sup_{x \in R \in B_N} \frac{1}{|R|} \int_R f(y) \, dy,$$

wobei B_N die Familie aller (nicht notwendig achsenparalleler) Rechtecke in $\mathbf{R}^n$ mit Exzentrizität N ist, (das sind Rechtecke mit Kantenlänge $a \times a \times \cdots \times a \times Na, a > 0, N > 0$.) und den Bochner-Riesz- Mitteln besteht. M_N kontrolliert die Bochner-Riesz-Mittel nur zur Hälfte. Die andere Hälfte liegt in einem Littlewood-Paley Argument begründet. Dies kommt in höheren Dimensionen deutlicher zum Vorschein. Für $n = 3$ erhalten wir (0.7).
Es ist in der Entwicklung eine interessante Situation eingetreten: In [Ch-D-RF 86] wurde mit rein analytischen Methoden bestimmt welche Norm M_N auf $L^p(\mathbf{R}^n), 1 \leq p \leq \frac{n+1}{2}$, hat (wir nutzen hier nur p=2 aus). Man vermißt jedoch das Littlewood-Paley Argument, welches die Beschränktheit der Bochner-Riesz-Mittel auf dem Bereich (0.7) ergeben würde.
Darüberhinaus besteht eine weitere ungeklärte Situation: In [Ch1 85] zeigte M. Christ eine (dilatationsinvariante) gewichtete Ungleichung für die Bochner-Riesz-Mittel auf $\mathbf{R}^n$, welche "nur" die klassische Hardy-Littlewoodsche Maximalfunktion

$Mf(x) = f^*(x) \,=\, \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)\, dy$ involviert:

$$\text{(0.8)} \qquad \int_{\mathbf{R}^n} |S_R^\alpha f(x)|^2 \; g(x)\, dx \;\le\; C \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 \; (Mg^r)^{\frac{1}{r}}\, dx$$

$$r = \tfrac{n+1}{2}, \;\; \alpha > \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n+1}.$$

Man hat hier auf der rechten Seite einen Operator vermutet, der mit M_N etwas zu tun haben sollte (siehe dazu auch unser Ergebnis in [Mo 87], dort wird als Folgerung einer gewichteten L^2-Ungleichung, grob gesprochen, (0.8) für radiale g für $\alpha = 0$ und $r \approx n$ gezeigt). In welcher Weise der Operator M_N in höheren Dimensionen mit dem Bochner-Riesz-Mittel zusammenhängt, ist kaum verstanden.

Wir werden dann folgenden Multiplikator diskutieren:

$$m_\alpha(x,z) \;=\; \chi_{[1,2]}(z)\; (1 - \frac{|x|}{z})_+^\alpha\,, \qquad (x,z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \;=\; \mathbf{R}^3, \alpha > 0$$

(der interessante Teil dieses Multiplikators hat im wesentlichen eine Singularität der Form $dist_+(x, Rand\ eines\ Kegelstumpfes)^\alpha$; man beachte $\chi_{[1,2]}(z) \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^3), 1 < p < \infty$.
In [St, Problem 3, 79] wird gefragt, ob

$$\widetilde{m}_\alpha(x,z) \;=\; (1 - \frac{|x|}{z})_+^\alpha\,, \qquad (x,z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}^3,$$

in $\mathbf{M}_4(\mathbf{R}^3)$ liegt für $\alpha > 0$. (Dies würde folgen, wenn man für m_α eine dilatationsinvariante gewichtete L^2-Ungleichung zeigt). Eine positive Antwort auf diese Frage würde bedeuten, daß m_α sich genauso wie der Bochner-Riesz-Multiplikator auf $\mathbf{R}^2$ verhält. Man weiß heute nur, daß $\widetilde{m}_\alpha \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^3)$ ist für $\alpha > 1/2$ und $1 < p < \infty$, und das sich mittels Interpolation mit $p = 2$ ergebende Resultat. Obiger Philosophie folgend wird sich m_α nicht schlechter als der Bochner-Riesz-Multiplikator zum Index α im $\mathbf{R}^3$ verhalten. Für letzteren vermutet man, daß (0.4) auch für $n > 2$ hinreichend ist, also sollte zumindest $m_\alpha \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R}^3)$ gelten für alle $\alpha > 0$.

Wir werden hier zeigen, daß m_α für $\alpha > \frac{1}{8}$ in $\mathbf{M}_4(\mathbf{R}^3)$ liegt. (Das würde man mittels komplexer Interpolation erhalten, wenn man zeigen könnte, daß $m_\alpha \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R}^3)$ ist für $\alpha > 0$.)
Obige Frage kann man natürlich auch in höheren Dimensionen stellen, d.h. für $(x,z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^{n+1}$. In Kapitel 2 werden wir eine gewichtete L^2-Ungleichung für den Faltungsoperator $Tf = \widehat{\widetilde{m}_\alpha} * f$ zeigen.
Kehren wir zurück zu unserer allgemeinen Situation. Das Beste, was wir im allgemeinen für einen Multiplikator m_α mit einer Singularität der Form $dist(x,M)^\alpha$ im Fall einer (kompakten) Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbf{R}^n$ der Kodimension ℓ erwarten können, ist das Folgende:
Für den Bereich

$$\alpha = \alpha(p) > n \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| - \frac{\ell}{2} \text{ und } 1 \le p \le \frac{2n}{n+\ell+2\ell\alpha} \tag{0.9}$$

ist $m_\alpha \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^n)$. Gilt für M eine $(L^{p_0}(\mathbf{R}^n), L^2(M))-$ Restriktionsungleichung für die Fourier-Transformation, so werden wir (0.9) mit der zusätzlichen Einschränkung $1 \le p \le p_0$ zeigen. Wir werden dann für gewisse Untermannigfaltigkeiten (siehe unten) zeigen, daß für diese (0.9) notwendig ist und, falls $1 \le p < \frac{2(n+\ell)}{n+3\ell}$, auch hinreichend. Dies ist ein vollständiges Analogon zum Kodimension 1 Fall $M = S^{n-1} = SO(n)/SO(n-1)$. Als Untermannigfaltigkeit legen wir einen regulären Orbit $\mathcal{O}_\Lambda$ im $\mathbf{p}-$Teil einer Carten-Zerlegung $\mathbf{g} = \mathbf{p} + \mathbf{k}$ einer einfachen reellen Lie-Algebra $\mathbf{g}$ zugrunde, d.h. $\mathcal{O}_\Lambda = Ad_K(\Lambda)$, wobei K die zu $\mathbf{k}$ korrespondierende kompakte Gruppe ist und Λ im Inneren einer Weyl-Kammer eines maximal abelschen Unterraumes $\mathbf{a}$ von $\mathbf{p}$ liegt. Daß wir sogar den Bereich bis $\frac{2(n+\ell)}{n+3\ell}$ für den Multiplikator $dist(x,\mathcal{O}_\Lambda)^\alpha$ *multipliziert mit einem* $\phi \in C^\infty(\mathbf{p})$ erreichen können, geht auf unsere Lösung des Restriktionsproblems von J.L. Clerc [Cl 81] zurück, die wir auf einer Oberwolfach-Tagung 1987 vorgetragen haben und hier gegeben wird. Grob gesprochen, bestand das Problem darin, ob scharfe Abschätzungen für die Fourier-Transformierte des vom umgebenden Euklidischen Raumes auf $\mathcal{O}_\Lambda$ induzierten Maßes, $d\mu_{\mathcal{O}_\Lambda}$, ausreichen für eine bestmögliche $(L^p(\mathbf{p}), L^2(\mathcal{O}_\Lambda))$-Restriktionsungleichung für die Fourier- Transformation. Zum Beweis, daß Bedingung (0.9) notwendig ist, werden wir nur die mittels der Methode der stationären Phase erhaltbare asymptotischen Entwicklung der Fourier-Transformierten des Maßes $d\mu_{\mathcal{O}_\Lambda}$ in einem Kegel, der ganz im Inneren einer Weyl-Kammer liegt, ausnutzen [Ba-Cl 81]. Mit dieser Methode werden wir dann eine notwendige Bedingung für die L^p-Konvergenz polyhedraler Summationsverfahren und der dazugehörigen Riesz-Mittel für Fourier-Reihen auf symmetrischen Räumen angeben. Damit verallgemeinern wir das in [Co-Gi-Tr 89] und in Spezialfällen in [Mo 87] erhaltene Divergenz-Resultat für die polyhedrale Summation von Fourier-Reihen auf kompakten Lie-Gruppen. Ob diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, wurde im Fall der Lieschen Gruppen in [Sta 76] für $Ad\,K-$ invariante Funktionen beantwortet, für eine allgemeine Funktion in $L^p(\mathbf{p})$ ist dies jedoch offen und hängt mit der Frage zusammen, ob das Multiplikator- Problem für den Kegel die in [St 79] erwartete Lösung besitzt. Der Kegel in $\mathbf{R}^3$ ist eine Mannigfaltigkeit, für die in jedem Punkt eine Hauptkrümmung verschwindet. In der allgemeineren Situation muß man zum Beispiel entscheiden, ob der Multiplikator

$$m_\alpha(X) = det_+(1 - X^*X)^\alpha, \quad X \in M(\ell \times n, \mathbf{C}),$$

hier bezeichnet det_+ die auf das erste Cartansche Gebiet eingeschränkte Determinantenfunktion. Ihre Fourier-Transformierte wurde in [Mo 87] berechnet und infolgedessen bestimmt, wann $\widehat{m}_\alpha$ in L^1 liegt. Für einen gewissen Teil des (topologischen) Randes dieses Gebietes verschwinden in jedem Punkt wenigstens $\ell - 1$ Hauptkrümmungen.

Die Fourier-Transformation einer Funktion $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ definieren wir durch

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(y)\, e^{-ixy}\, dy.$$

Die inverse Transformation ist dann gegeben durch $\check{f}(x) = (2\pi)^{-n} \hat{f}(-x)$. Wir notieren dann einige Eigenschaften der Algebren
$\mathbf{M}_p(\mathbf{R}^n) = \{m : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{C} | \quad \|(m\hat{f})\check{}\|_p \leq C\, \|f\|_p\},\ 1 \leq p \leq \infty$ ([Hö 60]).

(1) $\mathbf{M}_2 = L^\infty$.
(2) $\mathbf{M}_1 = \widehat{\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)}$, dabei ist $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ der Dualraum von $C_0(\mathbf{R}^n)$, der Raum der stetigen im unendlichen verschindenden Funktionen, versehen mit der Supremumsnorm.
(3) $\mathbf{M}_p = \mathbf{M}_{p'}$ für $1/p + 1/p' = 1$.
(4) $\mathbf{M}_p \subset L^\infty$ für $1 \leq p \leq \infty$.
(5) $\mathbf{M}_p \supset C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, somit ist $\mathbf{M}_p$ ein C_c^∞-Modul.
(6) Ist $m \in \mathbf{M}_p$ und T eine affine Abbildung, so ist auch $m \circ T \in \mathbf{M}_p$, und die Norm des Faltungsoperators ist unabhängig von T.

Eigenschaft (5) werden wir des öfteren ausnutzen, und zwar können wir mit ihr für Multiplikatoren mit kompaktem Träger immer eine endliche C^∞-Zerlegung der Eins einer Umgebung des Trägers $K = supp\, m$ heranziehen, $\sum_{1 \leq i \leq N} \phi_i = 1$ auf K, so daß es reicht $m\,\phi_i \in \mathbf{M}_p$ für $1 \leq i \leq N$ zu zeigen. Wir bemerken, daß Eigenschaft (2) besagt, daß für einen Multiplikator m mit kompaktem Träger die Bedingung $\hat{m} \in L^1$ notwendig und hinreichend dafür ist, daß m in $\mathbf{M}_1$ liegt. Für $p > 1$ haben wir das folgende notwendige Kriterium:

Proposition 1.0. *Ist $m \in \mathbf{M}_p$ und der Träger von m kompakt, so gilt $\hat{m} \in L^p$.*

Der Beweis ist sehr einfach. Es sei ϕ eine Testfunktion mit $\hat{\phi} = 1$ auf dem Träger von m. Dann folgt $(m\,\hat{\phi})\check{} = \check{m}$. Somit muß $\check{m} \in L^p$ sein.
Als Folgerung erhält man (0.4), denn die Fourier-Transformierte der Funktion $(1 - |x|^2)_+^\alpha$ ist durch eine sphärische Bessel-Funktion vom Index $\frac{n}{2} + \alpha$ gegeben, welche sich asymptotisch verhält wie

$$const. \quad |x|^{-\alpha - \frac{n+1}{2}} \left(A\, e^{-i|x|} + B\, e^{i|x|} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \qquad \text{für } |x| \to \infty$$

(siehe [Wa 44], [St 86]). Wir wollen im folgenden zeigen, welche Rolle das Unschärfeprinzip für die Fourier-Transformation bei der Behandlung von den in (0.2) beschriebenen Multiplikatoren spielt. Wir betrachten also einen Multiplikator m_α, welcher in der Nähe einer kompakten Hyperfläche M (für andere Kodimensionen geht die Argumentation genauso, daher werden wir uns auf diesen Fall beschränken) eine Singularität der Form $dist(x, M)^\alpha$ besitzt und auf $\mathbf{R}^n \setminus M$ C^∞

ist. Man beachte, daß die Distanzfunktion in der Nähe von M C^∞ ist (für den Fall, daß M nicht C^∞ ist, kann man die regularisierte Distanzfunktion [St 70, Kap. 6 §2] betrachen).
Es sei $a \in M$, $B_r \subset \mathbf{R}^n$ eine kleine Kugel um a mit Radius r und Ψ eine $C^\infty-$Funktion, welche 1 auf B_r ist und außerhalb von $K = B_{2r}$ verschwindet. Wir werden nun den Multiplikator $\tilde{m}_\alpha = \Psi\, m_\alpha$ betrachten und dazu zunächst eine Partition der Eins in einer Umgebung von K angeben. Es sei $A_k = \{x \in K | 2^{-k} < dist(x, M) < 2^{-k+1}\}, k \in \mathbf{N}$, und ψ_k eine $C^\infty-$Funktion mit Träger in $B_k = \{x \in K | \frac{1}{2} 2^{-k} < dist(x, M) < 2\, 2^{-k+1}\} \supset A_k$,so daß $\psi_k = 1$ auf A_k ist, $|\partial^\beta \psi_k| \leq 2^{k|\beta|}$ für jeden Multiindex β gilt und $\sum \psi_k = 1$ auf K ist (siehe z.B. [St 70]). Wir betrachten dann die folgende Zerlegungen des Multiplikators $\tilde{m}_\alpha$:

$$m_\alpha = \sum \psi_k\, \tilde{m}_\alpha = \sum m_k.$$

Es ist dann $|\,\partial^\beta m_k\,| \leq 2^{k\,|\beta|}$ (dies ist eine sehr grobe Abschätzung).

Heuristik. *Die C^∞-Funktionen m_k sind auf einem sehr "schmalen Band der Stärke 2^{-k} " getragen. Somit ist nach dem Unschärfeprinzip ihre Fourier-Transformierte im wesentlichen auf einer Menge mit Durchmesser $2^{k(1+\epsilon)}$, $\epsilon > 0$, getragen.*

Um dieser Aussage eine präzise Form zu geben, stellen wir zunächst fest, daß die Fourier-Transformierte von m_k die Abschätzung

$$|\,\hat{m}_k(x)\,| \,\leq\, C_N\; 2^{k\,N}\,(1 + |x|)^{-N} \quad \text{für alle } N \in \mathbf{N}$$

erfüllt. Das folgt mittels partieller Integration, d.h. aus $P(x)\,\hat{f} \,=\, (\,P(-i\partial)f\,)\hat{}$ für jedes Polynom P auf $\mathbf{R}^n$. Es gilt dann für $|x| \geq 2^{k(1+\epsilon)}$, $\epsilon > 0$, und $N, M \in \mathbf{N}$, $N \gg M$:

$$
\begin{aligned}
|\,\hat{m}_k(x)\,| \,&\leq\, C_N\,\left(\frac{2^k}{|x|}\right)^{N-M}\,\frac{2^{k\,M}}{|x|^M} \\
(*) \qquad &\leq\, C_N\; 2^{-k}\,|x|^{-M} \quad \text{falls } N > \frac{2M}{\epsilon}.
\end{aligned}
$$

Wir werden nun $\mathbf{R}^n$ in ein Gitter der Maschenweite $2\; 2^{k(1+\epsilon)}$ zerlegen, d.h. $\mathbf{R}^n = \bigcup Q$, wobei Q ein Quader der Kantenlänge $2 \cdot 2^{k(1+\epsilon)}$ ist. Mit Q_* sei der Quader bezeichnet, der die 3-fache Kantenlänge von Q besitzt und den selben Mittelpunkt wie Q hat. Für eine Funktion f setzen wir $f_Q = \chi_Q f$. Es gilt dann für den Faltungsoperator $T_k f = \hat{m}_k * f$:

$$
\begin{aligned}
T_k f \,&=\, \sum_Q \hat{m}_k * f_Q \,=\, \sum\, \chi_{Q_*}\,(\hat{m}_k * f_Q) \,+\, \sum\, \chi_{Q_*^c}\,(\hat{m}_k * f_Q) \\
&=\, T_k^1 f + T_k^2 f.
\end{aligned}
$$

Das Unschärfeprinzip besagt nun, daß der durch die zweite Summe definierte Operator T_k^2 vernachläßigbar ist, denn es gilt wegen $(*)$ und der einfachen Trägereigenschaft $supp\,(\,(\chi_{\{|x|<2^{k(1+\epsilon)}\}}\ \hat{m}_k) * f_Q\,) \subset Q_*$:

$$\begin{aligned} T_k^2 f(x) &= \sum_Q \ \chi_{Q_*}(x)\ \ \hat{m}_k\,(\,1 - \chi_{\{|x|<2^{k(1+\epsilon)}\}}\,)\ * f_Q\,(x) \\ &\leq \sum_Q \ \ \hat{m}_k\,(\,1 - \chi_{\{|x|<2^{k(1+\epsilon)}\}}\,)\ * f_Q\,(x) \\ &\leq C_\epsilon \ \ 2^{-k}\ (1 + |\cdot|)^{-M} * f(x). \end{aligned}$$

Somit ist der Operator T_k^2 auf L^p, $1 \leq p \leq \infty$, beschränkt mit Norm 2^{-k}, d.h. der Operator T_k^1 ist der wesentliche Teil, den es zu untersuchen gilt.

Die Methode hat ihre Ursprünge in einer auf E.M. Stein zurückgehenden Idee [C. Fe 73] (siehe auch [C. Fe 71], [So 87]), spielt jedoch schon bei der Behandlung der klassischen singulären Integrale eine wichtige Rolle.
Wir betrachten nun eine $C^\infty-$Hyperfläche M in $\mathbf{R}^n$, welche eine kompakte Menge berandet, und dazu den Multiplikator $m_\alpha = dist_+(x, M)^\alpha$. Man beachte m_α ist C^∞ im Innern von K.

Proposition 1.1. *Für $\alpha > \frac{n-1}{2}$ ist $m_\alpha \in \mathbf{M}_1(\mathbf{R}^n)$.*[1]

Ziehen wir die obigen Überlegungen heran (die Bezeichnungen werden übernommen), so reicht es zu zeigen: $\|T_k^1 f\|_1 \ \leq \ C\ 2^{-\delta\, k}\ \ \|f\|_1$ für $\delta > 0$. Es ist

---

[1]Der "einfachste" Beweis für $(1-|x|^2)_+^{\frac{n-1}{2}} \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$: Da die Hilbert-Transformation auf L^p, $1 < p < \infty$, beschränkt ist, liegt die charakteristische Funktion des Einheitsquaders χ_Q in $\mathbf{M}_p$ für $1 < p < \infty$. Nun ist $(1-|x|^2)_+^{\frac{n-1}{2}}$ in der Nähe von $\{|x| = 1\}$ so singulär wie der radiale Multiplikator $\int_{SO(n)} \chi_Q(gx)\ dg$ in der Nähe von $\{\,|x| = \sqrt{n}\,\}$. Mit Eigenschaft (6) für die $\mathbf{M}_p'$s folgt das Behauptete. Ähnlich kann man $(1-\frac{|x|}{z})_+^{\frac{n-1}{2}} \in \mathbf{M}_p(\mathbf{R}^{n+1})$, $1 < p < \infty$, zeigen (siehe S. 5), indem man
$(1-\frac{|x_1|+\cdots+|x_n|}{z})_+^{\frac{n-1}{2}}$ über Drehungen mittelt. Damit hat man jedoch wenig Einblick in die wahre Natur der zugehörigen singulären Integrale erlangt. Es ist nicht schwer zu sehen, daß diese "Rotationsmethode" nur für die Indizes $\alpha = \frac{n-1}{2}$ bzw. $\alpha > \frac{n-1}{2}$ ein gutes Resultat liefert.

nun

$$
\begin{aligned}
\|T_k^1 f\|_1 &= \|\sum_Q \chi_{Q_*}\ (\hat{m}_k * f_Q\,)\,\|_1 = \sum_Q \ \|\hat{m}_k * f_Q\|_{L^1(Q_*)} \\
&\le |Q_*|^{\frac{1}{2}} \sum_Q \|\hat{m}_k * f_Q\|_2 \qquad \text{(Cauchy-Schwarzsche Ungl.)} \\
&\le |Q_*|^{\frac{1}{2}} \sum_Q \|m_k \hat{f}_Q\|_2 \qquad \text{(Plancherel)} \\
&\le |Q_*|^{\frac{1}{2}}\ \|m_k\|_2 \sum_Q \|\hat{f}_Q\|_\infty \qquad (1.2) \\
&\le |Q_*|^{\frac{1}{2}} 2^{-\alpha\, k}\ 2^{-\frac{k}{2}} \sum_Q \|f_Q\|_1 \qquad \|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1,\ |supp\, m_k| = |B_k| \approx 2^{-k} \text{ und } |m_k(x)| < 2^{-\alpha\, k} \\
&= 2^{-(\alpha - \frac{n-1}{2})k}\ 2^{\frac{kn\epsilon}{2}}\ \|f\|_1.
\end{aligned}
$$

Wählen wir ϵ hinreichend klein, so folgt offenbar die Behauptung.

Wir notieren nun noch ein wichtiges Ergebnis, welches zuerst von M. Christ in [Ch1 85] bemerkt wurde.

Lemma 1.3. *Es sei $p > 2$ und $r = (\frac{p}{2})'$. Für den Operator T_k gelte die Ungleichnung $\|T_k f\|_p \le A_k\ \|f\|_2$. Dann gilt für jede integrierbare Funktion $g \ge 0$:*

$$\int_{\mathbf{R}^n} |T_k f|^2\ g\ dx \ \le\ C\ |Q_*|^{\frac{1}{r}}\ A_k^2 \int_{\mathbf{R}^n} |f|^2\ (Mg^r)^{\frac{1}{r}}\ dx,$$

wobei M der Hardy-Littlewoodsche Maximaloperator ist.

Der Beweis stützt sich zum einen auf den schon zum Beweis von (1.1) ausgenutzten Fakt, daß die Operatoren, welche man durch Einschränkung von T_k auf Q (päziser auf $L^p(Q)$) erhält, im wesentlichen disjunkt sind (man kann hier auch sagen, daß sie orthogonal sind, bezüglich $L^2(\mathbf{R}^n, g\,dx)$), zum anderen nutzt man folgende Eigenschaft des Hardy-Littlewoodschen Maximalfunktion: Es ist für eine integrierbare Funktion $h \ge 0$ und für jeden Punkt $x \in Q_*$: $\frac{1}{|Q_*|}\int_{Q_*} h(y)\ dy \ \le\ Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q\ h(y)\ dy$.

Offenbar reicht es (1.3) für T_k^1 zu zeigen. Es folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} |T_k^1 f|^2 \, g \, dx &= \int_{\mathbf{R}^n} |\sum_Q \chi_{Q_*} \, T_k f_Q|^2 \, g \, dx \\
&\leq 2^n \sum_Q \int_{Q_*} |T_k f_Q|^2 \, g \, dx \\
&\leq C \sum_Q \|T_k f_Q\|_p^2 \quad \|g\|_{L^r(Q_*)} \\
&\leq C \, A_k^2 \, |Q_*|^{\frac{1}{r}} \sum_Q \int_Q |f|^2 \, dx \left(\frac{1}{|Q_*|} \int_{Q_*} |g|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C \, |Q_*|^{\frac{1}{r}} \, A_k^2 \int_{\mathbf{R}^n} |f|^2 \, (Mg^r)^{\frac{1}{r}} \, dx.
\end{aligned}$$

Es sei bemerkt, daß $|Q_*|^{\frac{1}{r}} = 2^{n\,(1-\frac{2}{p}\,)\,k} \cdot 2^{\epsilon' \, k}, \ \epsilon' = const. \ \epsilon$ ist.

Wir werden später auf dieses Resultat zurückgreifen.

Wir zeigen nun, wie man mit der Methode von C.Fefferman in der Version von Cordoba [Co 79] die Beschränktheit des Bochner-Riesz-Mittels vom Index $\alpha > \frac{n-2}{4}$ auf $L^4(\mathbf{R}^n)$ erhält[1]. Dazu nutzen wir folgendes Ergebnis von [Ch-D-RF 86].[2]
Für die Norm des Maximaloperators

$$M_N f(x) = \sup_{x \in R \in B_N} \frac{1}{|R|} \int_R f(y)\, dy\,,$$

B_N ist die Basis aller Rechtecke in $\mathbf{R}^n$ mit Exzentrizität $N > 0$, gilt auf $L^2(\mathbf{R}^n)$ die Abschätzung

$$|||M_N|||_2 \leq N^{\frac{n-2}{2}} (\log N)^\beta \quad \text{für ein } \beta > 0.$$

Im folgenden Beweis wird nur ausgenutzt, daß der Maximaloperator bezüglich Mittelung über Rechtecke der Kantenlänge $1 \times \cdots \times 1 \times N$ mit beliebiger Richtung die obige Norm auf L^2 hat.

Satz (2.0). *Für $\alpha > \frac{n-2}{4}$ ist $(1-|x|^2)_+^\alpha \in \mathbf{M}_4(\mathbf{R}^n)$.*

Zum Beweis werden wir zunächst den Multiplikator $(1-|x|^2)_+^\alpha$ in radialer Richtung zerlegen. Sei dazu $\tilde{\phi}_k \in C_c^\infty(\mathbf{R}^+)$, $k \in \mathbf{N}$, mit Träger im Intervall $[1-3\,2^{-k}, 1-2^{-k}]$ und $|\partial^\beta \tilde{\phi}_k(x)| \leq const.\ 2^{k\,\beta}$, $x \in \mathbf{R}^+$, $\beta \in \mathbf{N}$. Es ist dann bei geeigneter Wahl von $\tilde{\phi}_k$ und $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$:

$$(1-|x|^2)_+^\alpha = \psi(x) + \sum 2^{-k\,\alpha}\, \tilde{\phi}_k(|x|).$$

Wir werden zeigen:

$$(*) \qquad \|\tilde{\phi}_k(|\;|)\hat{\ } * f\|_4 \leq C\, 2^{k\,\frac{n-2}{4}}\, k^{\frac{\beta}{2}}\, \|f\|_4\,.$$

Womit offenbar die Behauptung folgt. Ein einfaches Dilatationsargument zeigt, daß wir dazu Ungleichung $(*)$ für eine C^∞-Funktion ϕ_k verifizieren müssen, welche auf dem Intervall $[1, 1+2^{-k}]$ getragen ist und $|\partial^\beta \phi_k| \leq const.\ 2^{k\,\alpha}$ erfüllt. Es sei bemerkt, daß die radiale Funktion $\phi_k(|\,.\,|)$ auf einer Kugelschale der Dicke 2^{-k} lebt. Betrachten wir dann zunächst eine endliche Partition der Kugelschale $B_k = \{x \in \mathbf{R}^n | \, 1 \leq |x| \leq 1+2^{-k}\}$, so sehen wir, daß es ausreicht, den Multiplikator $\psi_k = \phi_k(|\,.\,|)\ \psi$, $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ zu betrachten, wobei ψ auf $Q \times \mathbf{R}^+ e_n$, $Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_n = 0,\ |x_i| \leq \frac{1}{2n}\}$ getragen ist. Es sei $B_k^1 = proj_n^{-1}(Q) \cap B_k \cap \{x_n >$

[1] (0.6) beinhaltet für $n > 3$ mehr, als wir hier zeigen.

[2] Wie schon bemerkt, wird in dieser Arbeit für $n > 3$ mehr gezeigt, als hier ausgenutzt wird. Für $p = 2$ ist in [Co 79] nur angegeben, was wir hier ausnutzen. Ein Beweis mit Hilfe der Linearisierungsmethode kann man in [Sch 89] nachlesen.

$0\}$, $proj_n$ bezeichne hier die Projektion entlang der x_n-Achse. Wollen wir B_k^1 mit Hilfe von Rechtecken in möglichst optimaler Weise überdecken, so müssen diese offenbar die Kantenlängen $2^{-\frac{k}{2}} \times \cdots \times 2^{-\frac{k}{2}} \times 2^{-k}$ haben. Dieser Gedanke führt dazu, den Quader Q in ein Gitter der Maschenweite $N^{-1} = 2^{-\frac{k}{2}}$ einzuteilen:

$$Q = \bigcup Q_m, \quad m \in [\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]^{n-1} \cap \mathbf{Z}^{n-1}$$

mit $Q_m = \times_{i=1}^{n-1}[\frac{m_i}{N}, \frac{m_i+1}{N}]$. Die Teilfamilie $\{Q_{2m}\}$ hat offenbar die Eigenschaft, daß das Innere eines verdoppelten Quaders, Q_{2m}^*, keinen anderen schneidet. Wir betrachten dann eine $C^\infty-$partition $\{\Psi_m\}$, so daß $\Psi_m = 1$ auf Q_{2m} ist, $\sum \Psi_m(x) = 1$ für $x \in Q$ gilt, Ψ_m außerhalb von Q_{2m}^* verschwindet und die Abschätzung $|\partial^\beta \Psi_m| \leq const.\, 2^{\frac{k}{2}\,|\beta|}$ erfüllt. Wir betrachten dann Ψ_m in natürlicher Weise als Funktion auf $Q_{2m}^* \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^n$.

Lemma. *Es sei $\eta \in S^{n-1} \cap Q_m \times \mathbf{R}e_n$ und $\xi \in (\mathbf{R}\eta)^\perp \subset \mathbf{R}^n$. Dann gilt*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta\,(\psi_k \Psi_m)| \leq const.\; 2^{k\,\beta}\; 2^{\frac{k}{2}|\alpha|}$$

für jeden Multiindex $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{n-1} \times \mathbf{N}$.

Einzig interessant ist offenbar die Abschätzung bezüglich der zu η orthogonalen Richtungen. Es sei ξ ein Einheitsvektor in $(\mathbf{R}\eta)^\perp$. Dann ist (beachte $\psi_k(x) = \phi_k(|x|)$ *multipliziert mit einem* $\psi \in C^\infty$, wobei ψ unabhängig von $k \in \mathbf{N}$ ist):

$$|\,\xi \cdot \nabla\,\psi_k \Psi_m\,| \leq |\,\xi \cdot x\,| \quad 2^k\,|\,\psi_k'(|x|)\;\Psi_m(x)\,| + c\,2^{\frac{k}{2}}.$$

Jeder Vektor $x \in supp\,(\psi_k\;\Psi_m)$ hat offenbar folgende Darstellung:
$x = (1+s)\,\eta + t\,\xi$ mit $s \in [0, 2^{-k}]$ und $|t| \leq 2^{-\frac{k}{2}}$. Somit ist $|\,\xi.x\,| \leq C\;2^{-\frac{k}{2}}$. Unter Ausnutzung der Leibnitzschen Formel folgt die Behauptung dann mit Induktion. Als Konsequenz erhalten wir folgende Abschätzung für die Fourier-Transformierte von $\psi_k \Psi_m$. Zunächst fixieren wir ein $\eta_m \in S^{n-1} \cap Q_m \times \mathbf{R}e_n$. Es ist dann für $x = s\,\eta_m + x^\perp,\; x^\perp \in (\mathbf{R}\,\eta_m)^\perp$:

$$\begin{aligned} |(\psi_k\,\Psi_m)\hat{}\,(x = s\eta_m + x^\perp)| &\leq C\;|supp\,(\psi_k\,\Psi_m)|\;\left(1 + \frac{|s|}{2^k}\right)^{-N}\left(1 + \frac{|x^\perp|}{2^{\frac{k}{2}}}\right)^{-N} \\ &\leq C \quad 2^{-k} \quad 2^{-k\,\frac{n-1}{2}} \quad \left(1 + \frac{|s|}{2^k}\right)^{-N}\;\left(1 + \frac{|x^\perp|}{2^{\frac{k}{2}}}\right)^{-N}. \end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $N \in \mathbf{N}$, wobei nur die Konstante von N abhängt. Erinnern wir uns an die Methode im vorherigen Kapitel, so können wir jetzt sagen, daß der zu $\psi_k\,\Psi_m$ gehörige Faltungsoperator T_m (zur einfacheren Schreibweise notieren wir die Abhängigkeit von k nicht explizit) im wesentlichen eine Mittelung über einen Zylinder in Richtung η_m (bzw. ein Rechteck) ist, welcher (im wesentlichen) die Höhe 2^k hat und dessen Grundfläche (im wesentlichen) einen Durchmesser $2^{\frac{k}{2}}$

besitzt. Das können wir wie folgt präzise formulieren: Wegen $1+\max\{s,t\} \leq (1+s)(1+t)$, gilt mit einer natürlichen Zahl $L > 2n$:

$$
\begin{aligned}
|(\psi_k\, \Psi_m)\hat{}(s\eta_m + x^\perp)| \;&\leq\; C\; 2^{-k(\frac{n+1}{2})} \int_0^\infty \chi_{[0,r]}\,(\frac{|s|}{2^k})\;\chi_{[0,r]}\,(\frac{|x^\perp|}{2^{\frac{k}{2}}})\;\frac{dr}{(1+r^2)^{-L}} \\
&= C \quad \int_0^\infty (1+r^2)^{-L}\;\frac{1}{|R_m(r)|}\quad \chi_{R_m(r)}\,(x)\; r^n\, dr,
\end{aligned}
$$

wobei $R_m(r)$ der Zylinder $\{x = s\,\eta_m + x^\perp \,|\, |s| \leq 2^k\, r,\; |x^\perp| \leq 2^{\frac{k}{2}}\, r\}$ ist. Der Operator T_m ist natürlich für ein festes $m \in [-\frac{N}{4}, \frac{N}{4}] \cap \mathbf{Z}^{n-1}$ beschränkt. Es gilt jedoch mehr (dazu nutzen wir die zu Beginn angegebene Ungleichung für den Maximaloperator M_N):

$$
(2.1) \qquad \| \left(\sum_m \;|T_m f_m|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|_4 \;\leq\; C \quad \sqrt{|||M_{2^{\frac{k}{2}}}|||_2} \quad \| \left(\sum_m \;|f_m|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|_4
$$

Man sieht diese vektorwertige Ungleichung wie folgt ein. Es ist mit $u(r) = (1+r^2)^{-L}\, r^n$ und einer Funktion $g \in L^2$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} = \quad & \int_{\mathbf{R}^n} \sum_m \;|T_m f_m|^2\; g dx \\
\leq C & \int_{\mathbf{R}^n} \sum_m \int_0^\infty u(r) \left| \frac{1}{|R_m(r)|} \quad \chi_{R_m(r)} * f_m \right|^2 \; g\; dx\; dr \\
\leq C & \int_0^\infty u(r) \quad \sum_m \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{|R_m(r)|} \quad \chi_{R_m(r)} * |f_m|^2\; g\; dx\; dr \\
\leq C & \int_0^\infty u(r) \int_{\mathbf{R}^n} \sum_m \;|f_m|^2 \quad \sup_m \;\frac{1}{|R_m(r)|} \quad \chi_{R_m(r)} * g\; dx\; dr.
\end{aligned}
$$

Wir können nun, indem wir um den Zylinder $R_m(r)$ ein Rechteck mit Exzentrizität $2^{\frac{k}{2}}$ legen, das ein zu $R_m(r)$ vergleichbares Volumen hat, den maximalen Mittelwert von g im Punkte $x \in \mathbf{R}^n$ mit $M_{2^{\frac{k}{2}}}\, g(x)$ majorisieren. Damit ist

$$
\mathbf{A} \;\leq\; C \;\| \left(\sum_m \;|f_m|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|_4^2 \quad \|M_{2^{\frac{k}{2}}}\, g\|_2.
$$

Ungleichung (2.1) folgt dann, indem wir auf beiden Seiten das Supremum über $g \in L^2$ mit $\|g\|_2 = 1$ nehmen.
Wir wollen natürlich die L^4-Ungleichung $(*)$ für den Operator

$$
Tf = \hat{\psi}_k * f = \sum_m \; T_m f
$$

zeigen. Was wir dazu brauchen ist folgende Ungleichung

$$(2.2)\qquad \| \sum_m T_m f_m \|_4 \leq C \quad 2^{k\,\frac{n-2}{8}} \; \| \left(\sum_m |T_m f_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_4 .$$

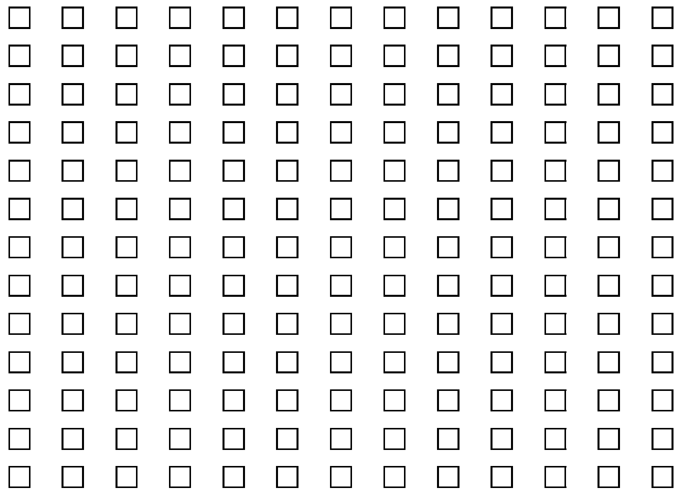
Es ist leicht zu sehen, daß es ausreicht, (2.2) zu zeigen, wenn wir dort m durch $p\,m$ ersetzen, mit einer festen natürlichen Zahl $p \gg 1$ (damit vergrößern wir nur die Konstante C nur um einen Faktor p^n). Wir setzen $E_m = supp\ \psi_k\, \Psi_m$. Unter Ausnutzung der Plancherel-Identität und der einfachen Eigenschaft für die Faltung zweier Funktionen, $supp\, f * g \subset supp\, f\ +\ supp\, g$, folgt dann:

$$\begin{aligned}
| \int \Big(\sum_m T_m f_m \Big)^2 g\,dx \,| &= | \int \sum_{m,m'} T_m f_m \; T_{m'} f_{m'} \; g\,dx \,| \\
&= | \int \sum_{m,m'} \psi_k \Psi_m \, \hat{f}_m * \psi_k \Psi_{m'} \, \hat{f}_{m'} \; \hat{g}\,dx \,| \\
&= | \int \sum_{m,m'} \psi_k \Psi_m \, \hat{f}_m * \psi_k \Psi_{m'} \, \hat{f}_{m'} \; \chi_{E_m + E_{m'}} \; \hat{g}\ dx \,| \\
&= | \int \sum_{m,m'} T_m f_m \; T_{m'} f_{m'} \quad (\chi_{E_m + E_{m'}} \; \hat{g})\check{}\ dx \,| \\
&\leq \int \Big(\sum_{m,m'} |T_m f_m \; T_{m'} f_{m'}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{m,m'} |(\chi_{E_m + E_{m'}} \; \hat{g})\check{}\,|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq \| \Big(\sum_m |T_m f_m|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \|_4^2 \quad \| \Big(\sum_{m,m'} |(\chi_{E_m + E_{m'}} \; \hat{g})\check{}\,|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \|_2 .
\end{aligned}$$

Nun ist $\| \big(\sum |(\chi_{E_m+E_{m'}}\ \hat{g})\check{}\,|^2 \big)^{\frac{1}{2}} \|_2 \ \leq\ \big(sup_{x \in \mathbf{R}^n} \sum \chi_{E_m + E_{m'}}(x) \big)^{\frac{1}{2}} \ \|g\|_2$. Also folgt (2.2), wenn wir zeigen (beachte: $N = 2^{\frac{k}{2}}$) :

$$(**)\qquad \sum_{m,m'} \chi_{E_m + E_{m'}}(x) \leq const. \quad N^{n-2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbf{R}^n .$$

Die Summation geht hier über $m, m' \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]^{n-1} \cap (\,p\,\mathbf{Z}\,)^{n-1}$. Die Symmetrie der Situation zeigt, daß es hinreichend ist, $(**)$ für Punkte auf der x_n-Achse nachzuweisen. Wir fragen also nach den möglichen Kombinationen (m, m'), so daß $x = r\,e_n = (0, \ldots, 0, r)$ die Darstellung $x = y + y'$ hat mit $y \in E_m$ und $y' \in E_{m'}$. Betrachten wir nur die ersten $n-1$ Koordinaten, so sehen wir, daß offenbar $m = m'$ gelten muß. Dabei machen wir davon Gebrauch, daß die $Q_{p\,m}$ disjunkt liegen.



Es sei nun Q_l^∂ ein Quader aus der Zerlegung $Q = \cup Q_m$, welcher mit ∂Q einen nichtleeren Durchschnitt hat und Q_0 der Quader, welcher den Nullpunkt enthält (siehe Bild). Weiter sei R_l das kleinste Rechteck, welches Q_l^∂, Q_0 und $-Q_l^\partial$ einschließt. Das Rechteck R_l liegt dann in Richtung $x_l = Zentrum\ von\ Q_l^\partial$. Wir bezeichnen mit $Q_{m(l)}$ die Quader, welche mit R_l einen nichtleeren Durchschnitt besitzen, und zerlegen nun die Summe $(**)$:

$$\begin{aligned}\sum_{m,m'} \chi_{E_m+E_{m'}}(x) &= \sum_m \chi_{E_m+E_{-m}}(x)\\ &\leq \sum_{Randquader\ Q_l^\partial} \quad \sum_{Q_m\cap R_l\neq\emptyset} \chi_{E_{m(l)}+E_{-m(l)}}(x).\end{aligned}$$

Zum Nachweis von $(**)$ bleibt zu zeigen, daß die innere Summe durch eine von N unabhängige Konstante beschränkt wird, denn es gibt $const.\ N^{n-2}$ viele Randquader. Es sei $s_{m(l)} = \sup\{s|\, s\, x_l + (x_l)^\perp \cap Q_m(l) \neq \emptyset\}$, $t_{m(l)} = \inf\{t|\, t\, x_l + (x_l)^\perp \cap Q_m(l) \neq \emptyset\}$ und $I_{m(l)} = [t_{m(l)}\,,\, s_{m(l)}]$. Offenbar haben die Intervalle $I_{m(l)}$ im wesentlichen die gleiche Länge $\approx \frac{1}{N}$. Es ist dann $R_l \cap Q_{m(l)} \subset R_l \cap \big(I_{m(l)}\, x_l + (x_l)^\perp\big) \stackrel{def}{=} \bar{Q}_{m(l)}$. Die Quader $\bar{Q}_{m(l)}$ liegen im wesentlichen äquidistant verteilt auf dem Rechteck R_l und haben einen Durchmesser $\leq$ $const.\, \frac{1}{N}$. Es seien $\bar{E}_{m(l)} = proj_n^{-1}(\bar{Q}_{m(l)}) \cap B_k^1$ die über $\bar{Q}_{m(l)}$ liegenden "Rechtecke" auf der Kugelschale B_k^1. Wir drehen dann das Rechteck R_l in die x_{n-1}-Achse. Zur Vereinfachung der Bezeichungen werden wir die nun vorliegende Situation nocheinmal beschreiben (wir ignorieren unwesentliche Konstanten): Wir haben ein Rechteck,

$$\begin{aligned}R = \{\, &(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n=0) \in \mathbf{R}^{n-1}\times\{0\}\subset\mathbf{R}^n |\\ &\qquad |x_{n-1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}},\ |x_i| \leq \frac{const.}{N},\ 1\leq i\leq n-2\,\},\end{aligned}$$

auf dem (im wesentlichen) äquidistant verteilt Quader Q_μ mit Durchmesser $\approx \frac{1}{N}$

liegen. Für die Mengen

$$E_\mu = proj_n^{-1}(Q_\mu) \cap \{x \in \mathbf{R}^n |\ 1 \le |x| \le 1 + \frac{1}{N^2},\ x_n > 0\}$$
$$\approx \{x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)|\ |x_i| \le \frac{1}{N},\ 1 \le i \le n-2\,,\ 1 \le |x| \le 1 + \frac{1}{N^2}\},$$

$\mu = 0, \pm 1, \ldots, \pm M,\ M \le \frac{N}{2}$, müssen wir zeigen, daß die Summe

$$\sum_\mu \chi_{E_\mu + (-E_\mu)}(x = r\, e_n),$$

unabhängig von N beschränkt ist. Wegen $E_\mu \subset \tilde{E}_\mu = \{x \in \mathbf{R}^n |\ |x_i| \le \frac{1}{N},\ 1 \le i \le n-2,\ 1 - \frac{const.}{N} \le x_{n-1}^2 + x_n^2 \le 1 + \frac{const.}{N},\ x_{n-1} \in [\frac{\mu - \frac{1}{2}}{N}, \frac{\mu + \frac{1}{2}}{N}]\,\}$, reicht es, dies für $\tilde{E}_\mu$ nachzuweisen. Jetzt sieht man leicht, daß dies eine zweidimensionale Frage ist. Es ist also zu zeigen, daß für

$$\hat{E}_\mu = \{x \in \mathbf{R}^2 | 1 - \frac{const}{N} \le x_1^2 + x_2^2 \le 1 + \frac{const}{N}, x_1 \in [\frac{\mu - \frac{1}{2}}{N}, \frac{\mu + \frac{1}{2}}{N}]\ \}$$

die Summe

$$\sum \chi_{\hat{E}_\mu + (-\hat{E}_\mu)}(0, r),$$

unabhängig von N beschränkt bleibt. Eine kompliziertere Variante dieser Frage werden wir im Beweis des nächsten Satzes zeigen. Hier sei bemerkt, daß obige zweidimensionale Frage in C. Fefferman's Beweis von (2.0) für $n = 2$ eingeht.

Der letzte Schritt zum Beweis von (2.0) ist nun die folgende zuerst von L.Carleson [Ca 67] gezeigte und von A. Cordoba in [Co 81] in einer gewichteten Version auf $\mathbf{R}^n$ verallgemeinerte

Ungleichung. *Es sei χ_m die charakteristische Funktion von $Q^*_{2m} \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^n$ (siehe S. 15). Dann gilt mit $f_m = \widehat{\chi}_m * f$:*

$$(2.3) \qquad \|(\sum_m\ |f_m|^2\,)^{\frac{1}{2}}\|_p\ \le\ C\ \|\,f\,\|_p \qquad \textit{für alle } p \ge 2.$$

Wegen $T_m f = T_m f_m$, erhält man dann mit (2.1), (2.2) und (2.3) die Un-gleichung $(*)$.

Wir werden nun den Multiplikator

$$m_\alpha(x, z)\ =\ \chi_{[1,2]}(z)\ (1 - \frac{|x|}{z})_+^\alpha\,, \qquad (x, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+\ =\ \mathbf{R}^3,\ \alpha > 0.$$

untersuchen. Zunächst werden wir festhalten, was die notwendige Bedingung (1.0) für diesen Multiplikator besagt. Dazu berechnen wir die Fourier- Transformierte der Funktion:

$$M_\alpha(x,z) \,=\, e^{-z}\; z_+^\alpha\; (1-\frac{|x|}{z})_+^\alpha .$$

Es gilt nun (wir setzen $2=n$, da das Folgende unabhängig von der Dimension ist)

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_\alpha(x,z) &= \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} e^{-t}\; (t-|y|)_+^\alpha e^{-ixy}\; e^{-izt}\; dx\; dt \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} e^{-t(1+iz)}\; t_+^\alpha\; e^{-(1+iz)|y|}\; e^{-ixy}\; dx\; dt \\
&= C\; \frac{1}{(1+iz)^{1+\alpha}} \quad \frac{1+iz}{[(1+iz)^2+|x|^2)]^{\frac{n+1}{2}}} \qquad \text{(siehe [St-W 71])} \\
&= C\; \frac{1}{(1+iz)^\alpha}\; \frac{1}{[1+i(z+|x|)]^{\frac{n+1}{2}}}\; \frac{1}{[1+i(z-|x|)]^{\frac{n+1}{2}}} .
\end{aligned}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß dieser Faltungskern im wesentlichen auf dem Kegel $\{|z| = |x|\}$ "singulär" ist beziehungsweise in einer konischen Umgebung davon (es ist $\widehat{M}_\alpha \in L^1(\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{\frac{|z|}{2} \le |x| \le 2\,|z|\})$). Nun gilt für $1 \le p \le 2$:

$$\text{(2.4)} \qquad \widehat{M}_\alpha \in L^p(\mathbf{R}^{n+1}) \iff \alpha > n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\,,$$

denn es ist

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{\frac{z}{2}\le|x|\le 2\,z} \left|\frac{1}{(1+iz)^\alpha}\; \frac{1}{[1+i(z+|x|)]^{\frac{n+1}{2}}}\; \frac{1}{[1+i(z-|x|)]^{\frac{n+1}{2}}}\right|^p dx\; dz \\
&\approx \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+|z|}\right)^{\alpha p+\frac{n+1}{2}p} z^{n-1} \int_{\frac{z}{2}}^{2z} \frac{1}{|1+i(z-r)|^{\frac{n+1}{2}p}}\; dr\; dz \\
&= \mathit{const.} \quad \int_0^\infty (1+|z|)^{n-p(\alpha+\frac{n+1}{2})}\; \frac{dz}{1+|z|} .
\end{aligned}$$

Da nun $\chi_{[1,2]}(z)$ in $\mathbf{M}_p(\mathbf{R}^{n+1})$ liegt und $\mathbf{M}_p$ ein C_c^∞ -Modul ist, gilt ent-sprechend $\widehat{m}_\alpha \in L^p$ für den in (2.4) angegebenen (α,p)-Bereich, d.h. wir erhalten mit dem Kriterium (1.0) keine weitere Einschränkung als die, welche wir mit dem schon zitierten de Leeuwschen Resultat erhalten (in $\mathbf{R}^3$ besagt dies: $m_\alpha \in \mathbf{M}_4(\mathbf{R}^3) \Longrightarrow \alpha > 0$).
Wir zeigen nun

Satz (2.5). *Für* $\alpha > \frac{1}{8}$ *ist* $m_\alpha \in \mathbf{M}_4(\mathbf{R}^3)$.

Der Aufbau des Beweises gleicht dem des vorherigen Satzes. Es seien $\tilde{\phi}_k,\ \psi_1,\ \psi_2$ C^∞-Funktionen auf $\mathbf{R}$, so daß $\mathit{supp}\,\tilde{\phi}_k \subset [1, 1+2^{-k}]$, $\mathit{supp}\,\psi_1 \subset [1,2]$, $\mathit{supp}\,\psi_2 \subset [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ und es gelte $|\partial^\beta \tilde{\phi}_k| \le \mathit{const.}\; 2^{k\,\beta}$ für alle $\beta \in \mathbf{N}$. Wir schreiben $(x,z) =$

$(r\,e^{i\theta}, z)$ und setzen $\phi_k = \tilde{\phi}_k(\frac{r}{z})\ \psi_1(z)\ \psi_2(\theta)$. Offenbar hat dann ϕ_k einen Träger in

$$E_k \;=\; \{(x,z) = (r\,e^{i\theta}, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, 1 \le \frac{r}{z} \le 1 + 2^{-k},\; -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},\; 1 \le z \le 2\}.$$

Wir können durch analoges Vorgehen wie im vorherigen Beweis (2.5) auf folgende Ungleichung reduzieren:

$$\|\,\hat{\phi}_k * f\,\|_4 \;\le\; C\; 2^{\frac{k}{8}}\; k^{\gamma}\; \|f\|_4, \qquad \gamma > 0.$$

Die Frage, welche sich zunächst stellt, ist die nach der geeigneten Zerlegung des Multiplikators ϕ_k. Unser Vorgehen wird klar durch das Folgende (wir setzen $N = 2^{\frac{k}{2}}$ und werden im folgenden die Abhängigkeit von k nicht mehr explizit notieren: z.B. $E = E_k$)

Lemma. *Es sei* $f \in L^4(\mathbf{R}^3)$, *supp* $\hat{f} \subset E$, $I_m = [\frac{m-\frac{1}{2}}{N}\,,\, \frac{m+\frac{1}{2}}{N}]$, $m = 0, \pm 1, \ldots, \pm [N\frac{\pi}{4}]$ *und*

$$E_m = \{(x,z) = (r\,e^{i\theta}, z) \in E \,|\, \theta \in I_m\,\}.$$

Dann gilt mit $f_m \;=\; (\chi_{E_m}\,\hat{f})\check{}$

(2.6) $$\|f\|_4 \;\le\; const.\; N^{\frac{1}{4}}\; \|\,(\sum_m\; |f_m|^2\,)^{\frac{1}{2}}\,\|_4.$$

Beweis: Wegen der Trägereigenschaft von $\hat{f}$ ist $f = \sum\; f_m$. Zunächst ist dann:

$$\begin{aligned}
|\int_{\mathbf{R}^3} f^2\; g\; dx\,| &= |\int \sum_{m,m'} \chi_{E_m}\,\hat{f} * \chi_{E_{m'}}\,\hat{f} \quad \hat{g}\; dx\,| \\
&\le \int \sum |f_m|^2 \quad \left(\sum_{m,m'} |(\chi_{E_m+E_{m'}}\;\hat{g})\check{}\,|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\le \|\left(\sum_m\; |f_m|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|_4^2 \quad \|\left(\sum_{m,m'} |(\chi_{E_m+E_{m'}}\;\hat{g})\check{}\,|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|_2.
\end{aligned}$$

Bleibt also zu zeigen:

$(*)$ $$\sum_{m,m'} \chi_{E_m+E_{m'}}(x) \;\le\; const.\; N \qquad \text{für alle } x \in \mathbf{R}^3.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir den Ausschnitt E des Kegelstumpfmantels (der Dicke 2^{-k}) entlang der z-Achse verschieben, so daß $E = \cup E_m$ zwischen den Ebene $\{z = \frac{1}{2}\}$ und $\{z = -\frac{1}{2}\}$ liegt. In der so translierten Situation zeigt eine einfache Symmetrieüberlegung, daß es ausreicht $(*)$ für Punkte $(r, 0, 0)$ auf der x-Achse nachzuweisen, wobei wir $1 < r < 4$ annehmen können. Es seien dann A, B Punkte aus E_m respektive $E_{m'}$ so, daß $A + B = x = (x, 0, 0)$ ist. Offenbar müssen die z-Koordinaten von A, B den gleichen Abstand vom Nullpunkt und entgegengesetztes Vorzeichen haben (unabhängig von m, m') (siehe Bild).

Es sei $\mathcal{P}(t)$ die Menge der Paare (m, m') so daß $x = A + B$ ist mit $A \in E_m$ und $B \in E_{m'}$ und $A \cdot e_3 = t,\ e_3 = (0, 0, 1)$. Es reicht dann zu zeigen:

$$\mathcal{S} = \sharp \{ \cup_{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \mathcal{P}(t) \} \leq const.\ N.$$

Die Projektion entlang der z-Achse auf die x, y-Ebene des Durchschnittes von E_m mit der Ebene $z = t$ ist enthalten in dem Rechteck

$$R_m(t) = e^{i \frac{m}{N}} \{ 1 + t + R \},$$

wobei R das Rechteck $\{ x + iy \,|\, |x| \leq \frac{1}{N^2},\ |y| \leq \frac{1}{N} \}$ ist. Es ist dann

$$R_m(t) + R_{m'}(-t) \subset 2 e^{i \frac{m+m'}{2N}} \left\{ \cos \frac{m - m'}{2N} + i\, t \sin \frac{m - m'}{2N} + i \left[-\frac{4}{N}, \frac{4}{N} \right] + \frac{1}{N} \left[-4 \sin \frac{m - m'}{2N}, 4 \sin \frac{m - m'}{2N} \right] \right\}.$$

Wir setzen $k = \frac{m+m'}{2}$ und $l = \frac{m-m'}{2}$. Notwendig dafür, daß $(r, 0)$ in $R_m(t) + R_{m'}(-t)$ liegt, ist dann offenbar

(1) $\frac{r}{2} \cos \frac{k}{N} \in \cos \frac{l}{N} + \frac{4l}{N^2}[-1, 1]$

(2) $\frac{r}{2} \sin \frac{k}{N} \in t \sin \frac{l}{N} + \frac{4}{N}[-1, 1]$.

Durch eventuelles Verkleinern des Ausschnittes E ($\theta < \frac{\pi}{100}$) können wir die trigonometrischen Funktionen durch ihre Taylorentwicklung ($\cos x \approx 1 - x^2/2$, $\sin x \approx x$) ersetzen und erhalten durch einfache Rechnungen

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\leq \sharp \Big\{ \cup_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \{ (k, l) \in [-N, N]^2 \cap \mathbf{Z}^2 \,|\, |k + \frac{2t}{r} l| \leq 8, \\ &\qquad\qquad |N^2(2r - 4) + 2l^2 - rk^2| \leq 16\, l \Big\} \\ &\approx 4\, \sharp \left\{ (k, l) \in [0, N]^2 \cap \mathbf{Z}^2 \,|\, |l - 4| \leq \sqrt{\frac{|k^2 - const.|}{2}} \leq l + 4 \right\} \\ &\leq 16\, N + \int_0^N \int_{-4+\surd}^{4+\surd} dl\ dk \\ &\leq C\ N. \end{aligned}$$

Wir bemerken noch, daß die Bedingungen (1) und (2) für $t=0$ besagen, daß $|k|\leq 4$ und $|l^2 - const.|\leq 8\,l$ ist. Offenbar erfüllen diese Bedingungen nur $4\cdot 20$ viele Paare (k,l), womit wir das ausstehende Argument im Beweis zu (2.5) gebracht haben.
Wir zerlegen nun den Multiplikator ϕ_k in Sektoren: Dazu sei $\Psi_0(x,y)=\tilde{\Psi}_0(\frac{y}{x})$, $\tilde{\Psi}_0\in C_c^\infty([-\frac{2}{N},\frac{2}{N}])$, $N=2^{\frac{k}{2}}$, so daß $\Psi_0=1$ auf dem Sektor $\{(x,y)=r\,e^{i\theta}\in \mathbf{R}^2\,|\,\theta\in I_0\}$ ist. Für die Ableitungen von Ψ_0 können wir dann annehmen: $|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\,\Psi_0(x,y)| = ||x|^{-\beta}\partial_x^\alpha\tilde{\Psi}_0^{(\beta)}(\frac{y}{x})|\approx\; C\,|\frac{y}{x}|^\alpha\;|\tilde{\Psi}_0^{(\alpha+\beta)}(\frac{y}{x})|\leq\; C\;2^{\beta\frac{k}{2}}$.
Wir setzen dann $\Psi_m=\Psi_0(e^{i\frac{m}{N}}\cdot)$ und können annehmen, daß $\sum\,\Psi_m=1$ ist auf dem Sektor, über dem E liegt, d.h. auf $\{r\,e^{i\theta}\in\mathbf{R}^2|\;|\theta|\leq\frac{\pi}{4}\}$. Wir betrachten dann Ψ_m in natürlicher Weise als Funktion auf $\mathbf{R}^3$. Offenbar ist dann $\phi_k\Psi_m$ auf E_m identisch 1 und verschwindet außerhalb einer kleinen Umgebung von E_m. Der Ausschnitt E_0 von E zeichnet offenbar eine Richtung in $\mathbf{R}^3$ aus, und zwar $\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$. Normal an die gekrümmte Oberfläche von E_0 liegt $\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, und othogonal zu diesen Vektoren ist $\xi=(0,1,0)$. Man rechnet nun leicht die folgenden Abschätzungen für die Ableitungen von $\phi_k\,\Psi_0$ nach:

$$|\;\partial_\eta^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\zeta^\gamma\;\phi_k\;\Psi_0\;|\leq\;C\;2^{k\,\alpha}\;2^{\frac{k}{2}\,\beta},$$

dabei hängt die Konstante nur von $\alpha,\;\beta,\;\gamma\in\mathbf{N}$ ab. Damit folgt für die Fourier-Transformierte von $\phi_k\,\Psi_0$:

$$|\,(\phi_k\,\Psi_0)\hat{}\,(r\eta+s\xi+t\zeta)\,|\;\leq\;C\;\frac{2^{-k}}{(1+\frac{|r|}{2^k})^\alpha}\quad\frac{2^{-\frac{k}{2}}}{(1+\frac{|s|}{2^{\frac{k}{2}}})^\beta}\quad\frac{1}{(1+|t|)^\gamma}$$

für alle $\alpha,\;\beta,\;\gamma\in\mathbf{N}$, wobei $C=C_{\alpha,\beta,\gamma}$ unabhängig von k ist. Wir sehen dann, daß, analog zum Beweis von (2.0), der entsprechende Faltungsoperator T_0 durch eine (kontinuierliche) Linearkombination von Mittelwerten über Rechtecke mit Kantenlängen $a\,N^2\times a\,N\times a,\;a>0$, deren längste Seite in Richtung η liegt, majorisiert werden kann. Durch eine Drehung um die z-Achse mit Winkel $\theta=\frac{m}{N}(<\frac{\pi}{4})$ erhalten wir analog eine Majorisierung der zu $\phi_k\,\Psi_m$ korrespondierenden Faltungsoperatoren T_m. Dabei liegen nun die Rechtecke in Richtung $\eta_m=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\cos\frac{m}{N},\;\sin\frac{m}{N},\;1)$, welche einen (endlichen Teil eines) Breitenkreis auf der Einheitssphäre auf der Höhe $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ausbilden. Wir bezeichnen nun mit $\tilde{M}_N$ den entsprechenden Maximaloperator, d.h.

$$\tilde{M}_N f(x)\;=\;\sup_{x\in R\in\tilde{B}_N}\frac{1}{|R|}\int_R f(y)\;dy,\qquad x\in\mathbf{R}^3,$$

wobei $\tilde{B}_N$ nun die Familie aller Rechtecke in $\mathbf{R}^3$ mit den Kantenlängen $a\,N^2\times a\,N\times a\,,\;a>0$, ist und deren längste Seite in Richtung $\eta_m=(\cos\frac{m}{N},\;\sin\frac{m}{N},\;1)$ liegt. In [Co2 81] (siehe auch [Pr 84]) wurde gezeigt, daß

$$\text{(2.7)}\qquad |||\tilde{M}_N|||_2\;\leq\;C\;(\log N)^{2\gamma}\qquad\text{für ein }\gamma>0$$

ist. Es folgt dann

$$(2.8) \qquad \| \left(\sum_m |T_m f_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_4 \leq C \quad \sqrt{|||\tilde{M}_{2^{\frac{k}{2}}}|||_2} \quad \| \left(\sum_m |f_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|_4.$$

Im letzten Schritt zum Beweis von (2.5) machen wir Gebrauch von folgendem Resultat [Co1 81]:
Es sei $f_m = (\chi_{supp\,\Psi_m} \hat{f}\,)\check{}$, dann gilt

$$(2.9) \qquad \|(\sum_m |f_m|^2)^{\frac{1}{2}}\|_4 \leq C \, (\log N)^{\gamma'} \, \| f \|_4 \qquad \text{für ein } \gamma' > 0.$$

Mit (2.6), (2.8) und (2.9) folgt nun für den Operator $Tf = \phi_k * f$:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_4 &= \| \sum T_m f\|_4 \\ &\leq C \, 2^{\frac{k}{8}} \, \|(\sum |T_m f|^2)^{\frac{1}{2}} \, \|_4 && \text{mit (2.6)} \\ &= C \, 2^{\frac{k}{8}} \, \|(\sum |T_m f_m|^2)^{\frac{1}{2}} \, \|_4 && \text{wegen } \Psi_m = \chi_{supp\Psi_m} \cdot \Psi_m \\ &\leq C \, 2^{\frac{k}{8}} \, k^{\gamma} \, \|(\sum |f_m|^2)^{\frac{1}{2}} \, \|_4 && \text{mit (2.8) für } N = 2^{\frac{k}{2}} \\ &\leq C \, 2^{\frac{k}{8}} \, k^{\gamma+\gamma'} \, \|f\|_4 && \text{mit (2.9).} \end{aligned}$$

Damit ist (2.5) gezeigt.
Bemerkungen:
(1) Es wäre wünschenswert eine gewichtete dilatationsinvariante L^2-Ungleichung für den Kegel zu beweisen. Ob obige Methode dazu führen kann, ist fraglich (vergl. dazu A. Carbery [Ca, 82]).
(2) Für den Kegel wurde in [Ta 85] ein Restriktionssatz bewiesen. Es ist jedoch unklar, wie man mit Hilfe dieses Resultats gute Ergebnisse im Hinblick auf das Multiplikatoren-Problem erhalten kann.
(3) Es ist nicht schwer den Beweis von (2.0) für Multiplikatoren mit einer Singularität der Form $dist_+(x, M)^\alpha$ zu übertragen, falls alle Hauptkrümmungen der kompakten Hyperfläche M in jedem Punkt nicht verschwinden, d.h. falls die Gaußsche Krümmung nicht verschwindet. Man führt dazu eine (2.2) entsprechende Ungleichung nach einem analogen Reduktionsschritt auf ein zweidimensionales Problem zurück und nutzt dann, daß alle Hauptkrümmungen nicht verschwinden.
(4) Die Beweismethode zu (2.0) (für höhere Dimensionen) hat gegenüber der Methode im nächsten Kapitel (man nutzt einen Restriktionssatz für die Fourier-Transformation) den Vorteil, daß sie eine Abschätzung für die Norm des Faltungsoperators, der zu einer charakteristischen Funktion eines Polyeders in $\mathbf{R}^n$ korrespondiert, in Abhängigkeit von der Anzahl der begrenzenden Hyperflächen liefert (siehe [Co 77]). Da man bisher die Norm des zu diesem Problem korrespondierenden Maximaloperators nicht exakt kennt, gehen wir darauf nicht weiter ein. Eine analoge Betrachtung kann man für den Kegel in $\mathbf{R}^3$ anstellen. Für einen Kegelstumpf K_N, dessen Basis durch ein regelmäßiges N-Eck gegeben ist, erhält man mit der Methode in [Co 77] und den zum Beweis von (2.5) gezeigten Ungleichungen : $|||\chi_{K_N}|||_{L^4(\mathbf{R}^3)} \leq C \, (\log N)^\alpha \, N^{\frac{1}{8}}$ für ein $\alpha > 0$.

Multiplikatoren mit Singularität $dist(x,M)^\alpha$ und eine gemischte $L^{(p)}$-Ungleichung für den Kegel

Es sei M eine kompakte Untermannigfaltigkeit von $\mathbf{R}^n$ der Kodimension ℓ. Ist M C^∞, so ist die Distanzfunktion in der Nähe von M eine C^∞-Funktion. Setzt man eine geringere Glattheit der Untermannigfaltigkeit voraus, so betrachte man die regularisierte Distanzfunktion [siehe St 70, Seite 170]. Wir setzen für $\alpha > 0$:

$$m_\alpha(x) \,=\, \Psi(x)\; dist(x,M)^\alpha,$$

wobei wir $\Psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ so wählen, daß $m_\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus M)$ ist. Weiter können wir wegen der Kompaktheit von M annehmen, daß Ψ einen Träger in einer kleinen Kugel um einen festen Punkt x_0 besitzt (vergl. Kap. 1). Es gilt dann der folgende

Satz 3.0. *Es gelte für die kompakte Untermannigfaltigkeit M der Kodimension ℓ eine $(L^p(\mathbf{R}^n), L^2(M))$-Restriktionsungleichung für die Fourier-Transformation:*

$$\|\hat{f}\|_2 \,\leq\, C\; \|f\|_p$$

für $1 \leq p \leq p_0$. Dann ist $m_\alpha \in M_p(\mathbf{R}^n)$, falls

$$\alpha > n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| - \frac{\ell}{2}$$

und $1 \leq p \leq p_0$.

Bemerkungen:
(1) Für eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension ℓ ist immer $p_0 \leq \frac{2(n+\ell)}{n+3\ell}$.
(2) Falls M reell analytisch ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so daß für die Fourier-Transformierte des vom Lebesqueschen Maß auf M induzierten Maßes, $d\mu$, eine Abschätzung der Form

$$|\widehat{d\mu}(x)| \,\leq\, C\; (1+|x|)^{-\epsilon}$$

gilt [St 86]. In [Gr 81] wurde gezeigt, wie man mit dieser Abschätzung eine Restriktionsungleichung erhält.
(3) Für Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 1 (oder allgemeiner: $dim\, M|n$) wurden in [Ch2 85] (bzw. [Pr 79]) $(L^p(\mathbf{R}^n), L^q(M))$- Restriktionsungleichungen bewiesen. Inwieweit diese für $q = 2$ scharf sind, ist ungeklärt.
(4) Im nächsten Kapitel wird ein scharfer (L^p, L^2)-Restriktionssatz bewiesen, wobei wir von der Fourier-Transformierten des induzierten Maßes zwar beste, aber keine radialen Abschätzungen ausnutzen.
(5) Die Kompaktheitsannahme an M ist notwendig, da anderenfalls die Ergebnisse in [Ru 83], [Ke-To, 79] zeigen, daß man dann im allgemeinen für die korrespondierenden Faltungsoperatoren nur L^2-Beschränktheit erwarten kann. In der nichtkompakten Situation muß im allgemeinen ein zusätzliches Abfallverhalten der

Multiplikatoren im Unendlichen vorgeschrieben werden, damit die entsprechenden Operatoren auf L^p-Räumen für $p \neq 2$ beschränkt sind.
(6) Im Falle, daß die Untermannigfaltigkeit eine Hyperfläche in $\mathbf{R}^n$ ist und zusätzlich Einheitssphäre bezüglich einer nichtisotropen Dilatationsstruktur, wurde der Satz in [Da 82] gezeigt. (Im Beweis des obigen Satzes werden wir nicht durch dilatieren eine volle Menge ausfüllen, sondern durch Translationen in Richtung der Normalen an die Fläche.)

Beweis zu (3.0): Wir werden die Voraussetzung im Lemma (1.3) zeigen, mit passenden Konstanten. Dazu werden wir den Multiplikator analog zum Vorgehen in Kap.1 zerlegen. Sei zunächst $T_{x_0}M$ die Tangentialebene an M im Punkte x_0. Wir dürfen unter Ausnutzung der Invarianz von $M_p(\mathbf{R}^n)$ unter affinen Abbildungen annehmen, daß $x_0 = 0$ und $T_{x_0}M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n |\, x_{n-\ell+1} = \cdots = x_n = 0\} \cong \mathbf{R}^{n-\ell}$ ist. Wir können dann M in einer Umgebung von 0 wie folgt parametrisieren:

$$\gamma : \mathbf{R}^{n-\ell} \supset U \ni y \mapsto (y, \gamma(y)) \in M$$

mit $\gamma \in C^\infty(U, \mathbf{R}^\ell)$, $\gamma(0) = 0$ und U offen. Die Abbildung

$$\Gamma : (y, v) \mapsto (y, v + \gamma(y))$$

definiert dann, wegen $det\, \Gamma' = 1$, einen lokalen Diffeomorphismus einer offenen Menge $U \times V \subset \mathbf{R}^{n-\ell} \times \mathbf{R}^\ell$ um den Nullpunkt in $\mathbf{R}^n$ auf ihr Bild.

Es sei nun ϕ eine C^∞-Funktion auf $\mathbf{R}^\ell$ so, daß

$$\phi(v) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |v| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |v| > 2. \end{cases}$$

Dann gilt für

$$\phi_k(v) = \phi(2^k v) - \phi(2^{k+1} v) : \quad supp\, \phi_k = \{v \in \mathbf{R}^\ell |\, \frac{1}{2^{k+1}} \leq |v| \leq \frac{1}{2^{k-1}}\},$$

und es ist $\sum_{k \geq 0} \phi_k(v) = 1$ für $|v| \leq 1$. Wir dürfen annehmen, daß die Funktion Ψ einen Träger in $\Gamma(U \times V)$ hat und $V \subset \{|v| \leq 1\} \subset \mathbf{R}^\ell$ ist. Wir setzen dann für $y \in U$ und $v \in V$:

$$\psi_k(x = \Gamma(y, v)) \;=\; \Psi(\Gamma(y, v))\; \phi_k(v).$$

Dann hat ψ_k einen Träger in $B_k = \{v + M \subset \mathbf{R}^n |\, \frac{1}{2^{k+1}} \leq |v| \leq \frac{1}{2^{k-1}}\} \cap supp\, \Psi$. Es ist dann:

$$m_\alpha(x) \;=\; \sum \psi_k(x)\; m_\alpha(x) \;=\; \sum\; m_k$$

und wir haben für die Ableitungen: $|\partial^\beta m_k| \leq C\ 2^{k|\beta|}$. Es seien dann T respektive T_k die zu m_α respektive m_k korrespondierenden Faltungsoperatoren. Analog zu der Betrachtung in Kap.1 zerlegen wir dann T_k in T_k^1 und T_k^2. Unter Ausnutzung der obigen Abschätzung für die Ableitungen von m_k sieht man wieder, daß der Operator T_k^2 vernachlässigbar ist. Wir zeigen nun

$$\|T_k f\|_{p_0} \leq C\ 2^{-(\alpha+\frac{\ell}{2})k}\ \|f\|_2.$$

Zunächst ist mit $\bar{v} = (0, v) \in \mathbf{R}^{n-\ell} \times \mathbf{R}^\ell$

$$\begin{aligned}
|T_k f(t)| &= |\int m_k(x)\ \hat{f}(x)\ e^{-ix\cdot x}\ dx| \\
&= |\int_{B_k} \int_U m_k(\Gamma(y,v))\ \hat{f}(\Gamma(y,v)) \quad e^{-it\cdot\Gamma(y,v)}\ dy\ dv| \\
&= |\int_{B_k} e^{-it\cdot\bar{v}} \int_U m_k \circ \Gamma \quad \hat{f} \circ \Gamma \quad e^{-it\cdot\Gamma(y,0)}\ dy\ dv| \\
&\leq \int_{B_k} |\int_U (\, m_k\, \hat{f}\,) \circ \Gamma \quad e^{-it\cdot\Gamma(y,0)}\ dy\ |\ dv.
\end{aligned}$$

Mittels Dualität erhält man nun aus der Restriktionsungleichung für die Fourier-Transformation:

$$\|\ \int_U (\, m_k\, \hat{f}\,) \circ \Gamma \quad e^{-it\cdot\Gamma(y,0)}\ dy\ \|_{L^{p_0}(\mathbf{R}^n)} \leq C\ \|\,(\, m_k\, \hat{f}\,) \circ \Gamma\,\|_{L^2(U)},$$

so daß wir (man beachte, daß $B_k \subset \{x \in \mathbf{R}^n |\ \frac{c_1}{2^{k+1}} \leq dist(x, M) \leq \frac{c_2}{2^{k-1}}\}$ ist, für geeignete Konstanten $c_1,\ c_2$)

$$\begin{aligned}
\|T_k f\|_{p_0} &\leq C \int_{B_k} \|\ m_k(\Gamma(\cdot, v))\ \hat{f} \circ \Gamma(\cdot, v)\ \|_{L^2(U)}\ dv \\
&\leq C\ |B_k|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_k} \int_U |m_k(\Gamma(y,v))|^2\ |\hat{f} \circ \Gamma(y,v)|^2\ dy\ dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\ |B_k|^{\frac{1}{2}}\ 2^{-\alpha} \left(\int_{B_k} \int_U |\hat{f} \circ \Gamma(y,v)|^2\ dy\ dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\ 2^{-k(\frac{\ell}{2}+\alpha)} \left(\int_{B_k} \int_U |\hat{f} \circ \Gamma(y,v)|^2\ dy\ dv \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\ 2^{-k(\frac{\ell}{2}+\alpha)} \left(\int_{\Gamma(B_k \times U)} |\hat{f}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\ 2^{-k(\frac{\ell}{2}+\alpha)}\ \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}
\end{aligned}$$

erhalten. Mit (1.3) folgt dann für $\alpha > n\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p_0}\right| - \frac{\ell}{2}$:

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^2(\mathbf{R}^n,g\,dx)} &= \|\sum T_k f\|_{L^2(\mathbf{R}^n,g\,dx)} \\
&\le \sum \|T_k f\|_{L^2(\mathbf{R}^n,g\,dx)} \\
&\le \sum 2^{k\,(\,n|\frac{1}{2}-\frac{1}{p_0}|-\alpha-\frac{\ell}{2}\,)}\,\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n,(Mg^r)^{\frac{1}{r}}\,dx)} \\
&= C\,\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n,(Mg^r)^{\frac{1}{r}}\,dx)}.
\end{aligned}$$

wobei $r = (\frac{p_0'}{2})'$ ist. Aus dieser gewichteten (dilatationsinvariante) Ungleichung erhält man nun leicht mit einem Dualitätsargument die Behauptung des Satzes für p_0. Natürlich gilt sie auch für $p \in [1, p_0]$, denn ein Interpolationsargument zeigt, daß der entsprechende Restriktionssatz für diese p's gilt.

Im nächsten Kapitel werden wir eine Anwendung des Satzes geben und zeigen, daß man im allgemeinen nicht mehr erwarten kann, als oben gezeigt.

Bemerkung: Ist M ein Kegelstumpfmantel in $\mathbf{R}^3$, dann ist der entsprechende Multiplikator m_α (passend auf dem Rand mit Ψ abgeschnitten), wie im vorherigen Kapitel gezeigt, in M_4 für $\alpha > \frac{1}{8}$. Nun ist ein (L^p, L^2)-Restriktionssatz für den Kegelstumpfmantel optimal, falls $p = \frac{6}{5}$ ist. Satz (3.0) besagt dann: $m_\alpha \in \mathbf{M}_{\frac{6}{5}}$, falls $\alpha > \frac{1}{2}$. Das ist sehr schlecht (wegen $m_\alpha \in \mathbf{M}_1$, für $\alpha > \frac{1}{2}$). Somit ist die Methode in Kap. 2 in gewissen Fällen schärfer.
Wie man im Falle verschwindender Gaußscher Krümmung unter Zuhilfenahme eines "geeigneten" Restriktionssatzes (3.0) verbessern kann, ist uns unklar.
Wir bemerken weiterhin, daß man für optimale (L^p, L^2)-Restriktionssätze den Exponenten p möglichst nahe bei 2 wünscht. Der Wunsch hat jedoch seine natürlichen Grenzen (A. Knapp's Argument). Wir haben jedoch folgende Möglichkeit:

Lemma 3.1. *Es sei* $1 \le p \le \frac{2(n+1)}{n+3}$. *Dann gilt die Ungleichung*

$$\int_1^2 \int_{S^{n-1}} |\hat{f}(ty',t)|^2\,dt\,dy' \;\le\; C\,\|f\|^2_{L^{(p,2)}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R})}.$$

Zum Beweis dieser Ungleichung ziehen wir den Tomas-Steinschen Restriktionssatz, den Satz von Plancherel und die Minkowskische Integralungleichung heran. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{S^{n-1}} |\,\widehat{f}(ty',t)\,|^2 \;\; dt\,dy' &\le C \int_1^2 t^{-\frac{2n}{p'}}\,\|\,\widehat{f}^{\,n+1}(x,t)\,\|_p^2\,dt \\
&= C\left(\|\int_{\mathbf{R}^n} |\,\widehat{f}^{\,n+1}(x,t)\,|^p\;dx\;\;\|_{L^{\frac{2}{p}}([1,2])}\right)^{\frac{2}{p}} \\
&\le C\left(\int_{\mathbf{R}^n} \|\,\widehat{f}^{\,n+1}(x,t)\,\|^p_{L^2([1,2])}\;dx\right)^{\frac{2}{p}} \\
&\le C\,\|f\|^2_{L^{(p,2)}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R})}.
\end{aligned}$$

Als einfache Folgerung erhalten wir für einen aufgedickten Kegelstumpfmantel $M_k = \{(x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^{n+1} \,|\, 1 \le t \le 2,\ A \le \frac{|x|}{t} \le A + 2^{-k}\}$, $A \in [\frac{1}{2}, 1]$ eine Konstante, die Ungleichung

$$(3.2) \qquad \|\hat{f}\|_{L^2(M_k)} \le C\, 2^{-\frac{k}{2}}\, \|f\|_{L^{(p,2)}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})}, \qquad 1 \le p \le \frac{2(n+1)}{n+3},$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten C.
Es sei nun

$$m_\alpha(x,t) = (1 - \frac{|x|}{t})_+^\alpha, \qquad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}^{n+1},\ \alpha > 0.$$

Für den entsprechenden Faltungsoperator T_α zeigen wir nun folgende Ungleichung.

Satz 3.3. *Es sei $p \ge \frac{2(n+1)}{n-1}$, $\alpha > \alpha(p) = n\,|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}| - \frac{1}{2}$ und $r = \frac{n}{1+2\alpha(p)} = (\frac{p}{2})^{-1}$. Dann gilt für jede integrierbare Funktion $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+$:*

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}} |T_\alpha f(x,t)|^2\, dt\; g(x)\, dx \le C \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}} |f(x,t)|^2\, dt\; (Mg^r)^{\frac{1}{r}}(x)\, dx,$$

dabei ist M der Hardy-Littlewoodsche Maximaloperator.

Daraus erhält man sofort die folgende gemischte $L^{(p,2)}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$-Ungleichung.

Korollar 3.4. *Es sei $1 \le p \le \frac{2(n+1)}{n+3}$ und $\alpha > n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| - \frac{1}{2}$. Dann gilt*

$$\|T_\alpha f\|_{L^{(p,2)}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})} \le C\, \|f\|_{L^{(p,2)}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})}.$$

Bemerkung: Aus $m \in \mathbf{M}_p$ folgt mit dem in [Be-Pa 61] gezeigten Interpolationssatz immer eine entsprechende $L^{(p,2)}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$-Ungleichung für den korrespondierenden Faltungsoperator. Also wäre (3.4) eine Folge von $m_\alpha \in \mathbf{M}_p$ für den obigen (α, p)-Bereich.
Beweis von (3.3): Es sei Ψ eine C^∞-Funktion auf $\mathbf{R}$, so daß *supp* $\Psi \supset [\frac{1}{2}, 2]$ ist und $\sum_{k \in \mathbf{Z}} \Psi(2^k t) = 1$ für $t \in \mathbf{R}$ gilt. Somit ist

$$m_\alpha(x,t) = \sum \Psi(2^k t)\, m_\alpha(x,t).$$

Unter Ausnutzung der Homogenität von m_α, der Dilatationsinvarianz der Ungleichung (3.3) und der Plancherel-Identität in der t-Variablen sieht man, daß die Ungleichung (3.3) äquivalent ist zu

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}} |Tf(x,t)|^2\, dt\; g(x)\, dx \le C \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}} |f(x,t)|^2\, dt\; (Mg^r)^{\frac{1}{r}}(x)\, dx,$$

dabei ist T der zu $\tilde{m} = \Psi\ m_\alpha$ korrespondierende Faltungsoperator, wobei Ψ vermöge $\Psi(x,t) = \Psi(t)$, auf $\mathbf{R}^{n+1}$ fortgesetzt ist. Wir zerlegen nun m wie im vorherigen Kapitel. Es sei also ϕ_k, $k \in \mathbf{N}$, eine Folge von C^∞-Funktionen auf $\mathbf{R}$, so daß ϕ_k auf einem Interval der Länge $\approx 2^{-k}$ und Mittelpunkt $\approx 1 - 2 \cdot 2^{-k}$ getragen ist, $|\partial^\beta \phi_k| \leq C\ 2^{k\,\beta}$ ist und

$$\begin{aligned} m(x,t) \,=\, (\Psi\, m_\alpha)(x,t) &= \sum\ 2^{-k\alpha}\ \Psi(x,t)\ \phi_k(\frac{|x|}{t}) \\ &= \sum\ 2^{-k\alpha}\ \psi_k(x,t) \end{aligned}$$

gilt. Entsprechend schreiben wir für die Faltungsoperatoren: $T = \sum\ 2^{-k\alpha}\ T_k$. Mit der Cauchyschen Ungleichung sieht man dann, daß es ausreicht zu zeigen, daß für die T_k's gilt:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}} |T_k f(x,t)|^2\ dt\ g(x)\ dx \,\leq\, C\ \ 2^{\epsilon k}\ 2^{k(\,n|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}|-\frac{1}{2})}.$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}} |f(x,t)|^2\ dt\ (Mg^r)^{\frac{1}{r}}(x)\ dx \tag{3.5}$$

für jedes $\epsilon > 0$ und einer nur von ϵ abhängigen Konstanten C. Eine einfache Überlegung zeigt, daß für die Ableitungen der ψ_k gilt :$|\partial^\beta \psi_k(x,t)| \leq C\ 2^{k\,|\beta|}$ für jeden Multiindex $\beta \in \mathbf{N}^{n+1}$. Damit wissen wir nach dem Unschärfeprinzip, daß die Fourier-Transformierte von ψ_k im wesentlichen auf einem ($n+1$-dimensionalen) Quader um den Ursprung mit Kantenlänge 2^k lebt. Schreiben wir also analog zum Vorgehen in Kapitel 1: $T_k \,=\, T_k^1 \,+\, T_k^2$, so ist T_k^2 vernachlässigbar. Das nun Folgende lehnt sich an den Beweis zu (1.3) an. Wir erinnern: Es ist $T_k^1 f \,=\, \sum_Q\ \chi_{Q_*}\, T_k f_Q$. Wir schreiben nun für die $n+1$-dimensionalen Quader Q: $Q \,=\, I_Q \times \tilde{Q}$, I_Q ein eindimensionales Intervall so, daß $\chi_Q(x,t) \,=\, \chi_{\tilde{Q}}(x)\ \chi_{I_Q}(t)$ gilt (entsprechendes für die verdoppelten Quader Q_*). Es ist dann:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^{n+1}} |T_k^1 f|^2\ g(x)\ dx\,dt &= \int_{\mathbf{R}^{n+1}} |\sum_Q\ \chi_{Q_*}\, T_k f_Q|^2\ g(x)\ dx\,dt \\ &\leq 3^{n+1} \sum_Q \int_{Q_*} |T_k f_Q|^2\ g\ dx\,dt \\ &= C \sum_Q \int_{\tilde{Q}_*} \int_{I_{Q_*}} |T_k f_Q|^2\ dt\ g(x)\ dx \\ (r = (\frac{p}{2})') \qquad &\leq C \sum_Q \|\ (\ \int_{I_{Q_*}} |T_k f_Q|^2\ dt\ )^{\frac{1}{2}}\ \|^2_{L^p(\tilde{Q}_*)}\ \ \ \|g\|_{L^r(\tilde{Q}_*)} \\ (*) \qquad &\leq C \sum_Q \|T_k f_Q\|^2_{L^{(p,2)}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R})}\ \ \ \|g\|_{L^r(\tilde{Q}_*)}. \end{aligned}$$

Nun erhält man leicht mit einem Dualitätsargument aus der Ungleichung (3.2) die Ungleichung

$$\|T_k f\|_{L^{(p,2)}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R})} \,\leq\, C\ 2^{-\frac{k}{2}}\ \|f\|_2, \qquad \text{für } p \geq \frac{2(n+1)}{n-1}.$$

Damit können wir $(*)$ weiter abschätzen durch:

$$\leq C \sum_Q 2^{-k} \; \|f_Q\|_2^2 \quad \|g\|_{L^r(\tilde{Q}_*)}$$

$$\leq C \; 2^{-k} \; |\tilde{Q}_*|^{\frac{1}{r}} \; \sum_Q \; \int_{I_Q} \int_{\tilde{Q}} |f|^2 \; dx \; dt \Big(\frac{1}{|\tilde{Q}_*|} \int_{\tilde{Q}_*} |g|^r \; dx \Big)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq C \; 2^{-k} \; |\tilde{Q}_*|^{\frac{1}{r}} \; \int_{\mathbf{R}^{n+1}} |f|^2 \; (Mg^r)^{\frac{1}{r}}(x) \; dx \; dt,$$

wobei wir im letzen Schritt die Schlußweise zum Beweis von (1.3) ausnutzen. Wegen $|\tilde{Q}_*|^{\frac{1}{r}} \; = \; 2^{n\,(1-\frac{2}{p}\,)\,k} \; \cdot \; 2^{\epsilon'\,k}, \; \epsilon' = const. \; \epsilon$, folgt dann offenbar (3.5) und damit (3.3).

Ein Restriktionssatz für die Fourier-Transformation und polyhedrale Bochner-Riesz-Mittel auf symmetrischen Räumen

Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein (für die Strukturtheorie der halbeinfachen Lie-Gruppen sei auf [Wa 73] und [He 78, 84] verwiesen). Es sei G eine reelle einfache zusammenhängende Lie-Gruppe von nichtkompaktem Typ mit endlichem Zentrum, K eine maximal kompakte Untergruppe von G und $\mathbf{g}$, $\mathbf{k}$ die Lie-Algebra von G respektive K. Es sei Θ die korrespondierende Cartan-Involution und $\mathbf{g} = \mathbf{k} + \mathbf{p}$, $\mathbf{k} = \{X \in \mathbf{g} | \, \Theta X = X\}$, $\mathbf{p} = \{X \in \mathbf{g} | \, \Theta X = -X\}$, die dazugehörige Cartan-Zerlegung von $\mathbf{g}$. Die Einschränkung der adjungierte Darstellung von G, $Ad = Ad_G$, auf die Gruppe K läßt den Unterraum $\mathbf{p}$ invariant. Mit B bezeichnen wir die Killingform auf $\mathbf{g}$. Ihre Einschränkung auf $\mathbf{p}$ gibt uns ein $Ad\,K-$invariantes Skalarprodukt auf $\mathbf{p}$. Weiter sei $\mathbf{a}$ ein maximal abelscher Unterraum von $\mathbf{p}$. Für $\alpha \in \mathbf{a}^*$ sei $\mathbf{g}_\alpha = \{X \in \mathbf{g} | \, ad_H(X) = [H, X] = \alpha(H)\, X$ für alle $H \in \mathbf{a}\}$, $m_\alpha = dim\, \mathbf{g}_\alpha$ und $\Sigma = \{\alpha \in \mathbf{a}^* \backslash \{0\} | \, \mathbf{g}_\alpha \neq \{0\}\,\}$ das System der Wurzeln bezüglich dem Paar $(\mathbf{g},\ \mathbf{a})$. Die durch $\alpha(H) = 0$ definierten Hyperebenen E_α zerlegen $\mathbf{a}$ in endlich viele Bereiche, die zusammenhängenden Komponenten von $\mathbf{a} \setminus \cup_{\alpha \in \Sigma} E_\alpha$ werden Weyl-Kammeren genannt. Ist M der Zentralisator von $\mathbf{a}$ in K und M' der Normalisator von $\mathbf{a}$ in K, so ist die Weyl-Gruppe $W = M'/M$ endlich, sie operiert transitiv auf der Menge der Weyl-Kammern. Wir fixieren nun eine Weyl-Kammer, $\mathbf{a}^+$, und setzen $\Sigma^+ = \{\alpha \in \Sigma | \, \alpha(H) > 0,$ für $H \in \mathbf{a}\}$.; die Menge der positiven Wurzeln.

Ist $\mathbf{p}'$ die Menge der regulären Punkte in $\mathbf{p}$, das sind die $X \in \mathbf{p}$, deren Zentralisator in $\mathbf{p}$ abelsch ist, so ist bezüglich dem Lebesqueschen Maß auf $\mathbf{p}$ $\mathbf{p} \setminus \mathbf{p}'$ eine Nullmenge, und es definiert die Abbildung

$$\beta : K/M \times \mathbf{a}^+ \ni (kM, H) \to Ad_k\, H \in \mathbf{p}'$$

einen Diffeomorphismus (verallgemeinerte Polarkoordinaten). Es seien dann dX, dH geeignet normierte Euklidische Maße auf $\mathbf{p}$ respektive $\mathbf{a}$ und dk ein Haarmaß auf K.

Die Funktionen

$$J(X, Y) = \int_K e^{-iB(X, Ad_k\, Y)}\, dk$$

werden verallgemeinerte Bessel-Funktionen genannt. Offenbar ist $J(X, Y) = J(X, Y) = J(Ad_k\, Y, Ad_k\, X)$ für $k \in K$ und $X, Y \in \mathbf{p}$, und da jedes $X \in \mathbf{p}$ auf einem Orbit unter der Operation von $Ad\, K$ auf $\mathbf{a}^+$ liegt, sind die Bessel-Funktionen schon eindeutig durch ihre Werte auf $\mathbf{a}^+ \times \mathbf{a}^+$ bestimmt. Wir definieren die Fourier-Transformation auf $\mathbf{p}$ durch

$$\hat{f}(X) = \int_{\mathbf{p}} f(Y)\, e^{-iB(X,Y)}\, dY\,, \qquad f \in L^1(\mathbf{p}).$$

Ist f eine $Ad\,K$-invariante Funktion, so ist ihre Fourier-Transformierte ebenfalls $Ad\,K$-invariant und es gilt

$$\hat{f}(X = Ad_k\, H) = \int_{\mathbf{a}^+} f(L)\; J_H(L)\; \omega(L)\; dL,$$

dabei ist $\omega(H) = \prod_{\alpha>0} \alpha(H)^{m_\alpha}$; eine homogene Funktion vom Grade $n - \ell$. Wir bemerken, daß, wenn wir einen Punkt $\Lambda \in \mathbf{a}$ fixieren, die Bessel-Funktion $J_\Lambda(X) = J(\Lambda, X)$, $X \in \mathbf{p}$, als Fourier-Transforierte des von dem umgebenden n-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbf{p}$ auf den Orbit $\mathcal{O}_\Lambda = Ad\,K\,\Lambda$ induzierten invarianten Maßes, $d\mu_{\mathcal{O}_\Lambda}$, aufgefaßt werden kann. In speziellen Situationen kann man die Bessel-Funktionen explizit berechnen. Für die Analysis wichtig ist dabei ihr asymptotische Verhalten. In der allgemeinen Situation wurde das asymptotische Verhalten in [Ba-Cl 81] und [Cl 82], [Du-Ko-Va 83] bestimmt:

Proposition 4.0. *Es seien $\Lambda, H \in \mathbf{a}$ reguläre Punkte. Für $w \in W$ sei $\gamma(w) = \sharp\{\alpha \in \Sigma^+ | \alpha(w^{-1}\Lambda) > 0\} - \sharp\{\alpha \in \Sigma^+ | \alpha(w^{-1}\Lambda) < 0\}$ und $c_w = e^{i\frac{\pi}{4}\gamma(w)}$. Dann haben die Bessel-Funktionen die asymptotische Entwicklung*

$$J_\Lambda(H) \approx \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{vol(K/M)} \quad |\omega(\Lambda)\,\omega(H)|^{-\frac{1}{2}} \sum_{w\in W} c(w)\; e^{iB(\Lambda, wH)} \cdot$$
$$\cdot\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} g_j(w^{-1}\Lambda, H)\right),$$

dabei sind die Funktionen g_j gegeben durch

$$g_j(\Lambda, H) = \sum_{|I|=|J|=j} \frac{\Gamma_{I,J}}{\alpha^I(\Lambda)\alpha^J(H)}, \quad \alpha^J(H) = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha^{j_\alpha}(H),$$

mit $\Gamma_{I,J} \in \mathbf{C}$. Betrachtet man einen endlichen Abschnitt der obigen Reihe, $j \leq k$, so ist die Differenz von J_Λ und der Entwicklung bis zum Index k in einem abgeschlossenen Kegel in $\mathbf{a}^+$, von der Ordnung $O(|H|^{-k-\frac{n}{2}-1})$.

Offenbar besagt diese Entwicklung, welche man mit der Methode der stationären Phase erhalten kann, nichts über das Verhalten in einer Umgebung des Randes der Weyl-Kammern. Eine präzise Abschätzung der Bessel-Funktionen J_Λ auch für diesen Bereich, somit auf ganz $\mathbf{a}$, wurde in [Cl 81] und [Du-Ko-Va 83] gezeigt:

Proposition 4.1. *Für reguläre $\Lambda \in \mathbf{a}$ und $H \in \mathbf{a}$ ist*

$$|J_\Lambda(H)| \leq C_\Lambda \prod_{\alpha>0} \frac{1}{(1 + |\alpha(H)|)^{\frac{m_\alpha}{2}}},$$

dabei ist die Konstante C_Λ gleichmäßig in $\Lambda \in \mathbf{a}^+$ beschränkt, falls Λ in einer kompakten Menge von $\mathbf{a}^+$ liegt.

Als Folgerung dieser Abschätzung, der asymptotischen Entwicklung (4.0) und wegen (siehe [Cl 81])

(4.2) $$|\{H \in \mathbf{a} \,|\, |\omega(H)| \leq 1\}| < \infty$$

erhält man dann das

Korollar 4.3. *Es sei $\Lambda \in \mathbf{a}$ regulär. Dann gilt mit $n = dim\, \mathbf{p}$ und $\ell = dim\, \mathbf{a}$*

$$J_\Lambda \in L^p(\mathbf{p}) \Longleftrightarrow p > \frac{2n}{n-\ell}.$$

Dies hat zur Konsequenz, daß die Fourier-Transformierte einer $Ad\,K$-invari-anten Funktion aus $L^p(\mathbf{p})$, $1 \leq p < \frac{2n}{n+\ell}$, eine stetige Funktion im Inneren von $\mathbf{a}^+$ ist. Liest man das oben Beschriebene für die Gruppe $G = SO(n,1)$, so sind dies wohlbekannte Tatsachen. Was noch aussteht, ist das Analogon zum Tomas-Steinschen Restriktionssatz.

Satz 4.4. *Es sei $\Lambda \in \mathbf{a}$ regulär, $\omega(\Lambda) \neq 0$. Dann gilt für $f \in L^p(\mathbf{p})$, $1 \leq p < p_0 = \frac{2(n+\ell)}{n+3\ell}$*

$$\int_{\mathcal{O}_\Lambda} |\hat{f}|^2 \, d\mu_{\mathcal{O}_\Lambda} \leq C \, \|f\|_p^2.$$

Es ist bekannt, daß für eine ℓ-dimensionale Untermannigfaltigkeit eines Euklidischen Raumes die Einschränkung $p \leq p_0$ notwendig ist. Im Fall, daß $\mathbf{g}$ eine komplexe Struktur hat -hier kennt man explizit die Bessel-Funktionen- erreicht man auch den Eckpunkt $p = p_0$.
Zum Beweis von (4.4) bemerken wir zunächst, daß für eine Testfunktion f

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}_\Lambda} |\hat{f}|^2 \, d\mu_{\mathcal{O}_\Lambda} &= \int_{\mathcal{O}_\Lambda} (f * \tilde{f})\widehat{\ }\, d\mu_{\mathcal{O}_\Lambda} \qquad \text{mit } \tilde{f} = \bar{f}(-\cdot) \\ &= \int_{\mathbf{p}} \tilde{f}\ \widehat{d\mu_{\mathcal{O}_\Lambda}} * f \, dX \\ &\leq \|f\|_p \quad \|\widehat{d\mu_{\mathcal{O}_\Lambda}} * f\|_{p'}\end{aligned}$$

ist. Mit ein wenig Funktionalanalysis sieht man, daß (4.4) äquivalent zur Beschränktheit des Faltungsoperators $Tf = \widehat{d\mu_{\mathcal{O}_\Lambda}} * f = J_\Lambda * f$ von $L^p \to L^{p'}$ ist. Wir machen zunächst folgende Feststellung: Es sei ϕ eine C^∞-Funktion mit kompaktem Träger in der Weyl-Kammer $\mathbf{a}^+$, so daß $\phi = 1$ ist in einer kleinen Umgebung des regulären Punktes $\Lambda \in \mathbf{a}$. Es ist dann, wenn wir die $Ad\,K$-invariante Fortsetzung von ϕ auf $\mathbf{p}$, welche dort eine C^∞-Funktion definiert, wieder mit ϕ bezeichnen:

$$\widehat{\phi} * J_\Lambda = J_\Lambda, \quad \text{also } \ Tf = \widehat{\phi} * J_\Lambda * f\,.$$

Wir betrachten dann folgende analytische Familie von Distributionen:

$$T_z f = (z + \frac{\ell}{n-\ell}) \quad \widehat{\phi} * \ (1 + |\omega|)^z \ J_\Lambda \ * f, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Da $|\omega(H)|$ invariant unter der Weyl-Gruppe ist, somit auf $\mathbf{p}$ $Ad\,K$-invariant fortsetzbar, ist T_z ein wohldefinierter Faltungsoperator, dessen Kern $Ad\,K$-invariant ist. Wegen (4.1) und da $\widehat{\phi}$ eine Testfunktion ist, ist der Kern von T_z für $Re\,z \leq \frac{1}{2}$ eine L^∞-Funktion und somit T_z ein beschränkter Operator von L^1 nach L^∞.

Zeigen wir, daß T_z für $Re\, z < -\frac{\ell}{n-\ell}$ auf L^2 beschränkt ist, so folgt (4.4) unmittelbar mit einem komplexen Interpolationsargument. Zur L^2-Beschränktheit müssen wir nachweisen, daß die Fouier-Transformierte des Faltungskerns von T_z, k_z, für $Re\, z < -\frac{\ell}{n-\ell}$ beschränkt ist. Es ist nun für $H \in \mathbf{a}$

$$
\begin{aligned}
|\widehat{k}_z(H)| &= |\phi(H)| \quad |\, (\, (1+|\omega|)^z \; J_\Lambda \,)\widehat{\ }(H)\,| \\
(*) \qquad &= |\phi(H)| \quad |\int_{\mathbf{a}^+} (1+|\omega(L)|)^z \;\, J_\Lambda(L) \; J_H(L) \;\, \omega(L)\; dL\;|.
\end{aligned}
$$

Da nun sowohl H als auch Λ regulär ist, (man beachte, daß der Träger von ϕ eine kompakte Umgebung von Λ ist, welche im Inneren der Weyl-Kammer liegt) können wir für J_H und J_Λ die Abschätzung (4.1) nutzen. Somit können wir $(*)$ abschätzen durch

$$
(**) \qquad \leq C \int_{\mathbf{a}} (1+|\omega(L)|)^{Re\, z} \;\, dL.
$$

Mit (4.2) schließen wir, unter Ausnutzung der Homogenität von $|\omega(H)|^{Re\, z}$, daß das letzte Integral für $Re\, z < -\frac{\ell}{n-\ell}$ endlich ist. Damit ist (4.4) gezeigt.
Wir zeigen nun noch, wie man den Eckpunkt p_0 erreicht, falls die Lie-Algebra $\mathbf{g}$ eine komplexe Struktur trägt. In diesem Fall sind die Bessel-Funktionen explizit gegeben durch folgende Formel von Harish-Chandra [Ha 57], [He 84]:

$$
J_\Lambda(H) \;=\; \frac{const.}{(\omega(H)\,\omega(\Lambda))^{\frac{1}{2}}} \sum_{w\in W} det\, w \; e^{iB(\Lambda, wH)}
$$

für $H, \Lambda \in \mathbf{a}$ (es sei bemerkt, daß die Quadratwurzel wohldefiniert ist, denn hier sind die Vielfachheiten $m_\alpha = 2$, $\sqrt{\omega}$ ist dann ein Polynom auf $\mathbf{a}$). Setzen wir dies in $(*)$ ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|\widehat{k}_z(H)| &\leq C \;|\; (z + \frac{\ell}{n-\ell}) \int_{\mathbf{a}} (1+\omega(H))^z \;\, e^{iB(\Lambda+H, L)} \;\, dL\;| \\
= C\;|\int_{S^{\ell-1}} (z+\frac{\ell}{n-\ell}) &\int_0^\infty (1+t^{n-\ell}\,\omega(L'))^z \;\, e^{it\,B(\Lambda+H,L')} \;\, t^{\ell-1}\; dt\; dL'\;| \\
\leq C\;|\int_{S^{\ell-1}} |\omega(L')|^{-\frac{\ell}{n-\ell}} \; dL' \cdot \sup_{s\in\mathbf{R}} &\;|\; (z+\frac{\ell}{n-\ell}) \int_0^\infty (1+t^{n-\ell})^z \;\, t^{\ell-1} \;\, e^{ist} \;\, dt\;|.
\end{aligned}
$$

Das Integral über die Einheitssphäre in $\mathbf{a}$ erkennt man mit dem Satz von Fubini als endlich, wenn man in $(**)$ Polarkoordinaten einführt. Das Supremum bleibt endlich für $Re\, z = -\frac{\ell}{n-\ell}$, da die Fourier-Transformierte einer glatten Funktion (es ist $n-\ell$ gerade), welche im Unendlichen im wesentlichen homogen vom Grade $-1+ir$, $r = (n-\ell)\; Im\, z$, ist, im wesentlichen eine homogene Funktion vom Grade $-ir$ multipliziert mit der Konstante $\frac{1}{r}$ ist. Also ist $|k_z(H)|$ für $Re\, z = -\frac{\ell}{n-\ell}$ durch eine höchstens polynomial in $Im\, z$ wachsenden Konstante beschränkt. Mit komplexer Interpolation erhält man dann das Gewünschte.

Als Folgerung von (3.0) und (4.4) erhalten wir dann für einen $Ad\,K$-invarian-ten Multiplikator auf $\mathbf{p}$ mit einer Singularität der Form $dist(X, \mathcal{O}_\Lambda)^\alpha$, $\Lambda \in \mathbf{a}^+$, also für $m_\alpha(X) = \phi(X)\ dist(X, \mathcal{O}_\Lambda)^\alpha$ mit ϕ aus dem Beweis von (4.4), die im folgenden Satz hinreichende Bedingung.

Satz 4.5. *Es sei* $1 \le p < \frac{2(n+\ell)}{n+3\ell}$ *und* $\alpha \neq 2m,\ m \in \mathbf{N}$. *Dann ist*

$$m_\alpha \in M_p(\mathbf{p}) \Longleftrightarrow \alpha > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{\ell}{2}.$$

Bemerkung: Die Einschränkung an α müssen wir vornehmen, da für gerade α der Multiplikator m_α eine C^∞-Funktion mit kompaktem Träger ist. Läßt man komplexe Werte für α zu, so entfällt die Einschränkung an α, falls der Imaginärteil von $\alpha > 0$ ist.
Es bleibt zu zeigen, daß die Bedingung an α notwendig ist. Dazu nutzen wir die asymptotische Entwicklung (4.0) und (1.0), d.h. wir zeigen:
$\hat{m}_\alpha \in L^p(\mathbf{p}) \Longrightarrow \alpha > n|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}| - \frac{\ell}{2}$. Zunächst ist für reguläre $X \in \mathbf{p}$, $X = Ad_k H,\ H \in \mathbf{a}^+$:

$$dist(X, \mathcal{O}_\Lambda)^\alpha = |H - \Lambda|^\alpha$$

(siehe [He 78, Seite 285]). Es sei K ein abgeschlossener Kegel in $\mathbf{a}^+$ und $K_R = \{H \in K |\, 1 \le |H| \le R\}$. Da ω homogen vom Grade $n - \ell$ ist, gilt offenbar für $L \in K_R$, $c_1\ |L|^{n-\ell} \le \omega(L) \le c_2\ |L|^{n-\ell}$ mit geeigneten Konstanten $c_1,\ c_2$. Es ist nun mit $g = \sum\ g_j$:

$$\|\widehat{m}_\alpha\|^p_{L^p(\mathbf{p})} \ \ge \int_{K_R \subset \mathbf{a}^+} \left| \int_{\mathbf{a}^+} m_\alpha(H)\ J_L(H)\ \omega(H)\ dH \right|^p \ \omega(L)\ dL$$

$$\begin{aligned}
&\ge C \int_{K_R} \left| \int_{\mathbf{a}^+} m_\alpha(H)\ \omega(H)^{\frac{1}{2}} \sum_{w \in W} c_w\ e^{iB(L,wH)}\ dH \right|^p \ \omega(L)^{1-\frac{p}{2}}\ dL \\
&- C \int_{K_R} \sum_{w \in W} \left| \int_{\mathbf{a}^+} m_\alpha(H)\ \omega(H)^{\frac{1}{2}}\ e^{iB(L,wH)}\ g(w^{-1}L, H)\ dH \right|^p \ \omega(L)^{1-\frac{p}{2}}\ dL \\
&= I^1_R - I^2_R.
\end{aligned}$$

Für die Abschätzungen der beiden Terme notieren wir folgendes

Lemma. *Es sei* $\alpha > 0,\ \alpha \neq 2m,\ m \in \mathbf{N}$ *und* $\psi \in C^\infty_c(\mathbf{R}^\ell)$ *mit* $\psi(0) \neq 0$. *Dann existieren Polynome* P_j *vom Grade* j *auf* $\mathbf{R}^\ell$ *so, daß*

$$\begin{aligned}
I_\alpha(y) \ &= \int_{\mathbf{R}^\ell} |x|^\alpha \psi(x)\ e^{ix\cdot y}\ dx \\
&= \frac{c_0\, \psi(0)}{|y|^{\alpha+\ell}} + \frac{c_1\, P_1(y)}{|y|^{\alpha+\ell+2}} + \cdots + \frac{c_k\, P_k(y)}{|y|^{\alpha+\ell+2k}} + O(\frac{1}{|y|^{\alpha+\ell+k+1}}),
\end{aligned}$$

dabei ist $c_0 \neq 0$ unabhängig von ψ und die Konstanten c_j hängen nur von den Ableitungen von ψ im Nullpunkt ab.

Beweis: Es sei $\alpha = 2m - \gamma,\ \gamma \in (0,2),\ m \in \mathbf{N}$. Mittels partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
I_\alpha(y) &= \int_{\mathbf{R}^\ell} |x|^\alpha \psi(x)\, e^{ix\cdot y}\, dx \\
&= (-1)^m\, |y|^{-2m} \int_{\mathbf{R}^\ell} \Delta^m(|\cdot|^\alpha \psi)(x)\, e^{ix\cdot y}\, dx \\
&= C\, |y|^{-2m} \int_{\mathbf{R}^\ell} \sum_{k=0}^{2m} |x|^{-\gamma+k}\, \psi_k(x)\, e^{ix\cdot y}\, dx \qquad (\text{mit } \psi_k \in C_c^\infty) \\
&= C\, |y|^{-2m} \int_{\mathbf{R}^\ell} |x|^{-\gamma}\, \psi(x)\, e^{ix\cdot y}\, dx + \tilde{I}_{\alpha+1}(y) \\
&= C\, |y|^{-2m} \int_{\mathbf{R}^\ell} \frac{1}{|y-x|^{\ell-\gamma}}\, \hat{\psi}(x)\, dx + \tilde{I}_{\alpha+1}(y) \\
&= C\, |y|^{-2m} \left(\int_{\{|x| \le \frac{|y|}{2}\}} \cdot \ \ dx + \int_{\{|x| \ge \frac{|y|}{2}\}} \cdot \ \ dx \right) + \tilde{I}_{\alpha+1}(y).
\end{aligned}$$

Man wird dann die Behauptung durch eine rekursive Argumentation erhalten, wenn die beiden ersten Integrale in Potenzen von $\frac{1}{|y|}$ entwickelt sind. Nun verschwindet, da $\hat{\psi}$ eine Testfunktion ist, das Integral über den Bereich $\{|x| \le \frac{|y|}{2}\}$ von beliebig hoher Ordnung. Für das erste Integral erhält man dann:

$$\begin{aligned}
\int_{\{|x| \le \frac{|y|}{2}\}} \cdot \ \ dx &= \int_{\{|x| \le \frac{|y|}{2}\}} \frac{1}{|y-x|^{\ell-\gamma}}\, \hat{\psi}(x)\, dx \\
&= \frac{1}{|y|^{\ell-\gamma}} \int_{\{|x| \le \frac{|y|}{2}\}} \sum_{k \ge 0} a_k \left(\frac{|x|^2 - 2\, x\cdot y}{|y|^2} \right)^k \hat{\psi}(x)\, dx \\
&= \frac{1}{|y|^{\ell-\gamma}} \left\{ \int_{\{|x| \le \frac{|y|}{2}\}} \hat{\psi}(x)\, dx + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\tilde{a}_1}{|y|^2} \int_{\{|x| \le \frac{|y|}{2}\}} x\cdot y\, \hat{\psi}(x)\, dx + \ldots \right\}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{|x| \le |y|/2} \hat{\psi}(x)\, dx - \psi(0) = \int_{|x| > |y|/2} \psi(x)\, dx = O(|y|^{-M})$$

für alle $M \in \mathbf{N}$, erhält man die Formel im Lemma durch ordnen nach Potenzen von $|y|$.

Für die Abschätzung von I_R^1 nach unten setzen wir zunächst:

$$M_\alpha(H) = \begin{cases} m_\alpha(H)\, \omega(H)^{\frac{1}{2}} & \text{für } H \in \mathbf{a}^+ \\ 0 & \text{für } H \in \mathbf{a} \setminus \mathbf{a}^+. \end{cases}$$

Offenbar ist $M_\alpha(H) = |H-\Lambda|^\alpha \cdot \psi(H-\Lambda)$ mit geeignetem $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{a}^+)$, $\psi(0) = \omega(\Lambda)^{\frac{1}{2}}$. Es ist dann

$$
\begin{aligned}
&| \int_{\mathbf{a}^+} m_\alpha(H)\ \omega(H)^{\frac{1}{2}} \sum_{w\in W} c_w\ e^{iB(L,wH)}\ dH\ | \\
&\qquad = | \int_{\mathbf{a}} M_\alpha(H) \sum_{w\in W} c_w\ e^{iB(L,wH)}\ dH\ | \\
&\qquad = | \sum_{w\in W} c_w \int_{\mathbf{a}} M_\alpha(H+\Lambda)\ e^{iB(L,w(H+\Lambda))}\ dH\ | \\
&\qquad = | \sum_{w\in W} c_w\ e^{iB(L,w\Lambda)} \int_{\mathbf{a}} |H|^\alpha\ \psi(H)\ e^{iB(L,wH)}\ dH\ | \\
&\qquad = C\ | \sum_{w\in W} c_w\ e^{iB(L,w\Lambda)} \left(\frac{\psi(0)}{|L|^{\alpha+\ell}} + O_w(\frac{1}{|L|^{\alpha+\ell+1}}) \right) |.
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir mit obigem Lemma und unter Ausnutzung, daß die Funktionen $e^{iB(L,w\Lambda)},\ w \in W$, ein linear unabhängiges Funktionensystem bilden:

$$
\begin{aligned}
I_R^1 &\geq C \int_{K_R} \left| \sum_{w\in W} c_w\ e^{iB(L,w\Lambda)}\ (\ \psi(0) + O_w(|L|^{-1})\ ) \right|^p |L|^{(n-\ell)(1-\frac{p}{2})-(\alpha+\ell)p} dL \\
&\geq C' \int_{K_R} |L|^{p\,(\,n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{\ell}{2}-\alpha\,)}\ (\ |\psi(0)|^p - |O(|L|^{-p})|\ )\ \frac{dL}{|L|^\ell}.
\end{aligned}
$$

Ist nun $\alpha \leq n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) - \frac{\ell}{2}$, so wächst I_R^1 offenbar logarithmisch beziehungsweise polynomial in R. Für die Diskussion des zweiten Integrals, I_R^2, bemerken wir zunächst, daß $|g - \sum_{j=1}^k\ g_j| \leq C\ (1+|L|)^{-k-\frac{n}{2}-1}$ ist und ein Summand der Funktionen g_j die Form $\alpha^I(L)\ \alpha^J(H),\ |I| = |J| = j$, hat. Also ist mit $|\alpha^I(L)| \geq c\ |L|^j$ auf K_R

$$
\begin{aligned}
I_R^2 &\leq C\ R^{\ell+(n-\ell)(1-\frac{p}{2})-p(k+1)} + \\
&+ C' \sum_{\substack{1\leq j\leq k,\\ |J|=j,\ w\in W}} \int_{K_R} \omega(L)^{1-\frac{p}{2}}\ |L|^{-j\,p} \left| \int_{\mathbf{a}^+} \frac{m_\alpha(H)\ \omega(H)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^J(H)}\ e^{iB(L,wH)}\ dH \right|^p dL.
\end{aligned}
$$

Da ω und α^J auf dem Träger von m_α C^∞-Funktionen sind, schreiben wir wieder für $H \in \mathbf{a}^+$:

$$
\frac{m_\alpha(H)\ \omega(H)^{\frac{1}{2}}}{\alpha^J(H)} = |H-\Lambda|^\alpha\ \psi(H-\Lambda)
$$

mit $\psi = \psi_J \in C_c^\infty(\mathbf{a}^+)$. Mit Hilfe des Lemmas werden wir nun die einzelnen Summanden I_R^2 abschätzen und erhalten

$$
I_R^2 \leq \sum_{j=1}^k C_j \int_{K_R} |L|^{(n-\ell)(1-\frac{p}{2})}\ |L|^{-p(\alpha+\ell+j)}\ dL + C'\ R^{\ell+(n-\ell)(1-\frac{p}{2})-p(k+1)}.
$$

Es ist klar, daß wenn wir k groß genug wählen, das wesentliche Verhalten von I_R^2 im ersten Summanden in obiger Summe steckt, also

$$I_R^2 \leq C \int_{K_R} |L|^{p(n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{\ell}{2}-\alpha-1)} \frac{dL}{|L|^\ell}.$$

Offenbar ist das asymptotische Verhalten von I_R^2 exakt eine Ordnung niedriger als das von I_R^1. Es ist also:

$$\|\widehat{m}_\alpha\|^p_{L^p(\mathbf{p})} \geq I_R^1 - I_R^2 \geq \begin{cases} C \ \log R & \text{für } \alpha = n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) - \frac{\ell}{2} \\ C\ R^\gamma,\ \gamma > 0 & \text{für } \alpha < n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) - \frac{\ell}{2}. \end{cases}$$

Womit die Behauptung des Satzes folgt.

Mit einer ähnlichen Vorgehensweise werden wir nun eine notwendige Bedingung für den folgenden Ad_K-invarianten Multiplikator herleiten: Es sei $\Lambda_0 \in \mathbf{a}^+,\ |\Lambda_0| = 1$. Dann setzen wir

$$m_\alpha(H) = m_{\alpha,\Lambda_0}(H) = (1 - B(\Lambda_0, H))^\alpha_+, \qquad H \in \mathbf{a}^+,\ \alpha \geq 0.$$

Wir bemerken, daß der Multiplikator m_α vermöge Transplantation zu einem polyhedralen Summationsverfahren von Fourier-Reihen auf kompakten symmetrischen Räumen korrespondiert (siehe [Dr 76], [Cl 76], [Sta 76]). Wir nennen diese in Anlehnung an den sphärischen Fall polyhedrale Bochner-Riesz Mittel zum Index α.

Weiter sei bemerkt, daß der Multiplikator m_α in der Nähe des Randes seines Trägers, $\mathcal{K} = Ad_K \{H \in \mathbf{a}^+ | \, B(\Lambda_0, H) \leq 1\} \subset \mathbf{p}$, durch $dist_+(X, \partial\mathcal{K})^\alpha$ gegeben ist. Das asymptotische Verhalten der Fourier-Transformierten von m_α ist dann von der lokalen Geometrie von $\partial\mathcal{K}$ abhängig. Nun ist im allgemeinen $\partial\mathcal{K}$ keine Untermannigfaltigkeit, nur der Teil, der aus regulären Punkten besteht, bildet eine glatte Hyperfläche. Wir werden im folgenden von der bekannten Tatsache Gebrauch machen, daß entlang der Normalen an diesen Teil von $\partial\mathcal{K}$ die Fourier-Transformierte von m_α ein "schlechtes" asymptotisches Verhalten besitzt.

Satz 4.6. *Es sei Λ_0 regulär, $r_0 = n - \ell + 1$, $1 \leq p \leq 2$ und $m_\alpha \in \mathbf{M}_p(\mathbf{p})$. Dann ist*

$$\alpha > r_0 \, (\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}.$$

Bemerkung: Die Einschränkung an Λ_0 wird, wie der Beweis zeigen wird, nicht notwendig sein, falls die Lie-Algebra eine komplexe Struktur besitzt. In diesem Fall können wir die explizite Formel von Harish-Chandra für die Bessel-Funktionen nutzten beziehungsweise den daraus folgenden Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformation auf $\mathbf{a}$ und der auf $\mathbf{p}$ für Ad_K-invariante Funktionen. In (4.6) muß man , wenn Λ_0 nicht regulär ist, $r_0 = \sharp\{\alpha \in \Sigma^+ | \, \alpha(\Lambda_0) \neq 0\} + 1$ setzen. Ob der Satz scharf ist, wird wahrscheinlich von der Lösung des 3-dimensionalen Problems für den Kegel abhängig sein.

Beweis von (4.6): Wir nutzen wieder (1.0) und (4.4). Zunächst werden wir den Träger von m_α mit einer C^∞-Funktion abschneiden: Es sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{a}^+)$, so daß $\psi = 1$ in einer kleinen Umgebung des regulären Punktes Λ_0 ist. Wir bezeichnen die W beziehungsweise Ad_K-invariante Fortsetzung von ψ zu einer C^∞-Funktion mit kompaktem Träger auf $\mathbf{a}$ respektive $\mathbf{p}$ wieder mit ψ. Es ist dann

$$\|\widehat{m}_\alpha\|_{L^p(\mathbf{p})} \geq C \; \|\widehat{\psi\, m}_\alpha\|_{L^p(\mathbf{p})}.$$

Wir setzen $M_\alpha = \psi\, m_\alpha$. Es ist klar, daß die Frage, ob $\widehat{M}_\alpha \in L^p$ ist, im wesentlichen von dem singulären Verhalten von M_α in der Nähe der Hyperebene $\mathcal{H}_0 = \{H \in \mathbf{a} |\, B(\Lambda_0, H) = 1\}$ (bzw. $\mathcal{H}_0 \cap supp\, M_\alpha$) abhängt, nicht etwa von der speziellen Wahl von ψ. Den Träger von ψ können wir also hinreichend klein wählen. Da die Hülle des Orbits von Λ_0 unter der Weyl-Gruppe W ein streng konvexes Polyeder ist, finden wir ein $s > 0$ derart, daß der Streifen $S = \{H \in \mathbf{a} |\, 1-s \leq B(\Lambda_0, H) \leq 1+s\}$ nur den Punkt Λ_0 aus dem Orbit $W\Lambda_0$ enthält. Wir können weiter annehmen, daß $supp\,\psi \cap \mathbf{a}^+ \subset S$ ist und $W\,(\,supp\,\psi \cap \mathbf{a}^+\,) \subset \mathbf{a}^+ \cap S$ ist (wir betrachten hier ψ als W-invariante Funktion auf $\mathbf{a}$). Es sei dann Q ein Quader in $\mathcal{H}_0$, der in $supp\,\psi \cap \mathcal{H}_0 \subset \mathbf{a}^+$ liegt und $R_T = Q \times [1, T] \subset \mathbf{a}^+\Lambda_0,\ T >> 1$. Wir werden das asymptotische Verhalten der Bessel-Funktionen $J_L(H)$ für $L \in R_T$ und $H \in supp\, M_\alpha = supp\,\psi$ ausnutzen. Es sei bemerkt, daß R_T in einem abgeschlossenen Kegel in $\mathbf{a}^+$ liegt. Nun ist mit $g = \sum\ g_j$

$$\|\widehat{M}_\alpha\|^p_{L^p(\mathbf{p})} \geq \int_{R_T \subset \mathbf{a}^+} \left| \int_{\mathbf{a}^+} M_\alpha(H)\ J_L(H)\ \omega(H)\ dH \right|^p \omega(L)\ dL$$

$$\begin{aligned}
&\geq C \int_{R_T} \left| \int_{\mathbf{a}^+} M_\alpha(H)\ \omega(H)^{\frac{1}{2}} \sum_{w \in W} c_w\ e^{iB(L,wH)}\ dH \right|^p \omega(L)^{1-\frac{p}{2}}\ dL \\
&- C \int_{R_T} \sum_{w \in W} \left| \int_{\mathbf{a}^+} M_\alpha(H)\ \omega(H)^{\frac{1}{2}}\ e^{iB(L,wH)}\ g(w^{-1}L, H)\ dH \right|^p \omega(L)^{1-\frac{p}{2}}\ dL \\
&= I_T^1 - I_T^2.
\end{aligned}$$

Wir bemerken, daß $I_T^2 = 0$ ist, falls die Lie-Algebra $\mathbf{g}$ eine komplexe Struktur besitzt. Zunächst werden wir I_T^1 nach unten abschätzen. Dazu bemerken wir, daß $\omega^{\frac{1}{2}} = |\omega|^{\frac{1}{2}}$ auf $\mathbf{a}^+$ gilt und $|\omega|^{\frac{1}{2}}$ auf $supp\, M_\alpha \cap \mathbf{a}^+$ eine C^∞- Funktion ist. Es ist dann $\tilde{M}_\alpha = M_\alpha\ |\omega|^{\frac{1}{2}}$ eine W-invariante Funktion auf $\mathbf{a}$. Also gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{a}^+} M_\alpha(H)\ \omega(H)^{\frac{1}{2}} \sum_{w \in W} c_w\ e^{iB(L,wH)}\ dH \\
&\qquad = \int_{\mathbf{a}} \tilde{M}_\alpha(H) \sum_{w \in W} c_w\ \chi_{w\mathbf{a}^+}(H)\ e^{iB(L,wH)}\ dH \\
&\qquad = I(L).
\end{aligned}$$

Wir setzen $g = \sum_{w\in W} c_w \, \chi_{w\mathbf{a}^+}$; eine nicht W-invariante Funktion auf $\mathbf{a}$. Wir betrachten $I(L)$ als eine Linearkombination ($\sum_{w\in W}$) von oszillierenden Integralen. Können wir ausschließen, daß sich die Summanden nicht gegenseitig auslöschen, daß also ein Summand das wesentliche asymptotische Verhalten von $I(L)$ wiedergibt, so hat man $I(L)$ leicht im Griff. Nun kann man dies jedoch nicht ohne weiteres annehmen. Deshalb gehen wir folgenden Weg. Zunächst bemerken wir, daß $\omega(L) \geq c\, B(\Lambda_0, L)^{n-\ell}$ auf R_T gilt. Mit $\sigma = (n-\ell)(1-\frac{p}{2})$ ist dann

$$I_T^1 \geq C \int_{R_T} |I(L)|^p \, B(\Lambda_0, L)^\sigma \, dL.$$

Es sei nun ϕ eine C^∞-Funktion auf $\mathbf{R}$ mit Träger im Intervall $[1-s, 1+s]$ und $\Phi(H) = \phi(B(\Lambda_0, H)$ für $H \in \mathbf{a}$, d.h. Φ ist auf dem Streifen S getragen. Mit den vorherigen Überlegungen können wir annehmen, daß $\Phi(H)\, \tilde{M}_\alpha(H) = \tilde{M}_\alpha(H)$ für $H \in \mathbf{a}^+$ gilt. Wir zeigen zunächst die folgende

Ungleichung.

$$\int_{R_T} |\widehat{\Phi} * f|^p \, B(\Lambda_0, L)^\sigma \, dL \leq C \int_{R_{2T}} |f|^p \, B(\Lambda_0, L)^\sigma \, dL + C' \, \|f\|^p_{L^\infty(\mathbf{a})}$$

für $1 \leq p < \infty$ *und alle* $\sigma \geq 0$.

Dabei ist $\widehat{\Phi}$ die Fourier-Transformierte von Φ auf $\mathbf{a}$. Da Φ auf den zu Λ_0 orthogonalen Hyperebenen konstant ist, gilt mit $L = \bar{L} + t\Lambda_0$ und $H = \bar{H} + s\Lambda_0$, $\bar{H},\ \bar{L} \in \Lambda_0^\perp,\ s, t \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} |\widehat{\Phi} * f(L = \bar{L} + t\Lambda_0\,)|^p &= |\int_{\mathbf{R}} \widehat{\phi}(s)\; f(\,\bar{L} + (t-s)\Lambda_0)\, ds\,|^p \\ &\leq C \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\phi}(s)|\; |f(\bar{L} + (t-s)\Lambda_0)|^p \, ds\,. \end{aligned}$$

Folglich gilt mit $R_T = Q \times [\,1, T\,]\,\Lambda_0$:

$$\int_{R_T} |\widehat{\Phi} * f|^p \, B(\Lambda_0, L)^\sigma \, dL \leq C \int_Q \int_1^T \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\phi}(s)|\; |f(\bar{L} + (t-s)\Lambda_0)|^p \, t^\sigma \, dt d\bar{L}.$$

Setzen wir $K_{\bar{L}}(s) = |f(\bar{L} + (t-s)\Lambda_0)|^p$, so ist dies

$$\begin{aligned} &= C \int_Q \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\phi}| *_1 K_{\bar{L}}(t)\; \chi_{[\,1,T\,]}(t)\; t^\sigma \, dt d\bar{L} \\ &= C \int_Q \int_{\mathbf{R}} K_{\bar{L}}(t)\; |\widehat{\phi}| *_1 (\chi_{[\,1,T\,]}\, |s|^\sigma)(t)\; dt d\bar{L} \\ &= A. \end{aligned}$$

Da $|\widehat{\phi}(s)| \leq C_M \ (1+|t|)^{-M}$ für alle $M \in \mathbf{N}$, zeigt eine einfache Rechnung:

$$\int_1^T |\widehat{\phi}(t-s)| \ s^\sigma \ ds \ \leq \ C \begin{cases} t^\sigma & \text{für } 1 \leq t \leq 2T, \\ (1+|t|)^{-\frac{M}{2}} & \text{für } t \leq 1 \text{ und } t \geq 2T \end{cases}$$

für alle hinreichend großen $M \in \mathbf{N}$. Also ist

$$\begin{aligned} A \ &\leq \ C \ \int_Q \int_1^{2T} \ K_{\bar{L}}(t) \ t^\sigma \ dt \ d\bar{L} \ + \ C' \ \int_Q \int_{\mathbf{R}} \ K_{\bar{L}}(t) \ (1+|t|)^{-\frac{M}{2}} \ dt \ d\bar{L} \\ &\leq \ C \int_{R_{2T}} \ |f|^p \ B(\Lambda_0, L)^\sigma \ dL \ + \ C' \ |Q| \ \|K_{\bar{L}}(t)\|_{L^\infty(\mathbf{a})} \\ &\leq \ C \int_{R_{2T}} \ |f|^p \ B(\Lambda_0, L)^\sigma \ dL \ + \ C' \ \|f\|_\infty^p. \end{aligned}$$

Nutzen wir diese Ungleichung für $f = I$, so erhalten wir für I_T^1 :

$$I_T^1 \ \geq \ C \int_{R_{\frac{T}{2}}} \ |(\widehat{\Phi} * I\,)\,(L)|^p \ B(\Lambda_0, L)^\sigma \ dL \ - \ C' \ \|I\|_\infty.$$

Nun war $\tilde{M}_\alpha \ = \ \psi\, m_\alpha\, |\omega|^{\frac{1}{2}}$. Durch eventuelles Verkleinern des Trägers von ψ können wir $\Phi = 1$ auf $supp\,\psi$ annehmen. Also ist wegen $supp\,\Phi\,\tilde{M}_\alpha \subset \mathbf{a}^+$ und $g = C(= c_{id})$ auf $\mathbf{a}^+$:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi} * I\,(L = \bar{L} + t\Lambda_0) \ &= \ \int_{\mathbf{a}^+} (\Phi\,\tilde{M}_\alpha\, g)(H) \ e^{iB(L,H)} \ dH \\ &= \ C \ \int_{\mathbf{a}^+} \ \tilde{M}_\alpha(H) \ e^{iB(L,H)} \ dH \\ &= \ \int_{\mathbf{a}^+} \ \tilde{M}_\alpha(\bar{H} + s\Lambda_0) \ e^{iB(\bar{L},\bar{H})} \ e^{ist} \ ds \ d\bar{H}. \end{aligned}$$

Weiter haben wir die Freiheit ψ so zu wählen, daß für $H = \bar{H} + s\Lambda_0 \in \mathbf{a}^+$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\alpha(\bar{H} + s\Lambda_0) \ &= \ (\psi\,\omega^{\frac{1}{2}})(\bar{H} + s\Lambda_0) \ (1 - B(\Lambda_0, \bar{H} + s\Lambda_0))_+^\alpha \\ &= \ \psi_1(s)\,\psi_2(\bar{H}) \ (1-s)_+^\alpha \end{aligned}$$

mit $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty$ so, daß $supp\,\psi_1\psi_2 = supp\,\psi$ ist ($supp\,\psi_1 \subset [1-a, 1+a], \ a \leq 1/2$). Es ist dann

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi} * I\,(\bar{L} + t\Lambda_0) \ &= \ C \ \int \ \psi_1(s) \ (1-s)_+^\alpha \ e^{ist} \ ds \ \int \psi_2(\bar{H}) \ e^{iB(\bar{H},\bar{L})} \ d\bar{H} \\ &= \ C \ \widehat{\psi}_2(\bar{H}) \ e^{it} \left(\frac{c_1}{t^{\alpha+1}} + \frac{c_2}{t^{\alpha+2}} + \ldots \right), \end{aligned}$$

und somit erhalten wir:

$$I_T^1 \geq C \int_1^{T/2} t^{-p(\alpha+1)+(n-\ell)(1-\frac{p}{2})} \, dt \int_Q |\widehat{\psi}_2(\bar{H})|^p \, d\bar{H} \, - \, const. \, ,$$

dabei ist $const. = C \, \|I\|_\infty < \infty$.

Wir werden nun zeigen, daß I_T^2 vernachlässigbar ist gegenüber I_T^1 für $T \to \infty$. Für die Abschätzung von I_T^2 erinnern wir uns der Gestalt von g. Es ist

$$g(L,H) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ |I|=|J|=j}} \frac{\Gamma_{I,J}}{\alpha^I(L)\,\alpha^J(H)} \; + \, O(|L|^{-(k+1)}) \;\text{ für } (H,L) \in supp\, M_\alpha \times R_T.$$

Den wesentlichen Beitrag zu I_T^2 liefern die Summanden mit $|I| = 1$, denn $\frac{1}{\alpha^J(H)}$ ist auf $supp\, M_\alpha$ eine C^∞-Funktion, wird also das asymptotische Verhalten der Fourier-Transformation von M_α nur unwesentlich beeinflußen, und da $\frac{1}{\alpha^I(L)}$ auf R_T sich im wesentlichen wie $|L|^{-|I|}$ verhält, sieht man durch Ordnen nach Potenzen von $|L|$ das Gesagte. Weiter beobachten wir, daß die Terme mit $|I| = 1$ sich nur durch eine C^∞-Funktion auf dem Träger von M_α unterscheiden. Da auch $\omega(H)^{\frac{1}{2}}$ auf $supp\, M_\alpha$ eine C^∞-Funktion ist, wird es hinreichend sein, für eine Funktion der Gestalt

$$\tilde{M}_\alpha(H) \; = \; \frac{1}{\beta(L)} \; M_\alpha(H) \; \Psi(H), \;\; \Psi \in C^\infty(\mathbf{a}^+), \;\; \beta \in \Sigma^+$$

das innere Integral in dem Ausdruck für I_T^2 zu betrachten. Es ist dann mit $|\omega(L)| \leq c\, B(\Lambda_0, L)^{n-\ell}$ und $|\beta(L)| \geq \, c\, B(\Lambda_0, L)$ auf R_T:

$$I_T^2 \, \leq \, C \int_{R_T} \sum_{w \in W} \left| \int_{\mathbf{a}^+} \; \tilde{M}_\alpha(H) \; e^{iB(L,wH)} \; dH \right|^p \; B(\Lambda_0, L)^{(n-\ell)(1-\frac{p}{2})-p} \; dL.$$

Schreiben wir nun: $L = \bar{L} + t\Lambda_0$ und $H = \bar{H} + s\Lambda_0$ mit $\bar{H}, \; \bar{L} \in \Lambda_0^\perp, \; s,t \in \mathbf{R}$, so gilt offenbar

$$\tilde{M}_\alpha(H = \bar{H} + s\Lambda_0) = (1-t)_+^\alpha \; \Phi(t, \bar{H}),$$

dabei ist $\Phi \in C^\infty(supp\, M_\alpha)$. Bezeichnen wir nun mit Δ_0 die Restriktion des Laplace-Operators auf den Unterraum $\Lambda_0^\perp$, so erhält man mittels partieller Integration $(L = \bar{L} + s\Lambda_0)$:

$$(1+|\bar{L}|^2)^N \; | \int_{\mathbf{a}^+} \; \tilde{M}_\alpha(H) \; e^{iB(L,H)} \, dH \, | \; = \; | \int_{\mathbf{a}^+} (1-\Delta_0)^N \tilde{M}_\alpha(H) \; e^{iB(L,H)} \; dH \, |$$

$$\leq \int_{\Lambda_0^\perp} | \int_{\mathbf{R}\Lambda_0} \; e^{iB(\bar{H},\bar{L})} \; (1-\Delta_0)^N \Phi \, (\bar{H} + s\Lambda_0) \; (1-s)_+^\alpha \; e^{ist} \; ds \, | \; d\bar{H}$$

$$\leq \, C \; (1+|s|)^{-\alpha-1}.$$

In der letzten Zeile machen wir Gebrauch von der eindimensionale Version des Lemmas, welches im vorherigen Beweis gezeigt wurde (siehe auch [St 86]), und nutzten dabei aus, daß die Ableitungnen von $(1-\Delta_0)^N \Phi(\bar{H}+s\Lambda_0)$ nach s gleichmäßig in s und H beschränkt sind. Es ist also:

$$| \int_{\mathbf{a}^+} \tilde{M}_\alpha(H)\, e^{iB(L,H)}\, dH \,| \,\leq\, C\,(1+|L|^2)^{-\alpha-1},$$

und es folgt dann :

$$\begin{aligned} I_T^2 \,&\leq\, C \int_{R_T} (1+|L|)^{-p(\alpha+1)}\; B(\Lambda_0,H)^{(n-\ell)(1-\frac{p}{2})-p}\; dL \\ &\leq\, C \int_1^T t^{-(\alpha+1)p\,+\,(n-\ell)(1-\frac{p}{2})-p}\; dt, \end{aligned}$$

somit haben wir mit $r_0 = n-\ell+1$:

$$I_T^1 - I_T^2 \,\geq\, C \begin{cases} \log T, & \text{falls } \alpha = r_0\,(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}, \\ T^\delta,\ \delta>0, & \text{falls } \alpha < r_0\,(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Womit (4.6) gezeigt ist.

Zum Schluß sei bemerkt, daß der Beweis in [Co-Gi-Tr 89] für (4.6) mit $\alpha = 0$ beziehungsweise des entsprechenden Analogons auf den kompakten Lieschen Gruppen davon Gebrauch macht, daß die Gewichtsfunktion $\omega(H)^{1-\frac{p}{2}}$ in der Gewichtsklasse A_p liegt. Dieser Beweis ist nicht für die polyhedralen Bochner-Riesz Mittel mit Index $\alpha > 0$ verwendbar, da man durch die A_p-Bedingung den p-Bereich einschränken muß. Mit dem positiven Ergebnis in [Sta 76], (siehe auch das punktweise Konvergenzresultat in [Sta-To 78]), welches sich leicht auf die Lie-Algebra übertragen läßt [Mo 87] und dem negativen Ergebnis (4.6) fassen wir noch einmal zusammen:

Korollar. *Es sei* $\mathbf{g}$ *die Lie-Algebra einer einfachen und kompakten Lie-Gruppe* U, $1 \leq p \leq 2$ *und* $f \in L^p(\mathbf{g})$ *eine* Ad_G*-invariant Funktion. Dann gilt*

$$\|\widehat{m}_0 * f\|_p \,\leq\, C\|f\|_p$$

genau dann, wenn $p > \frac{2r_0}{r_0+1}$ *ist.*

Entsprechendes gilt für Klassenfunktionen auf der kompakten Lie-Gruppe U.

Literaturangaben

[Ba-Cl]. D. Barlet und J.L. Clerc, *Le comportement à l'infini des fonctions de Bessel généralisées I*, Adv. in Math. **61** (1986), 165-183.

[Be-Pa 61]. A. Benedek und R. Panzone, *The spaces L^p with mixed norm*, Duke Math. J. **28** (1961), 301-324.

[Bo 36]. S. Bochner, *Summation of multiple Fourier series by spherical means*, Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1936), 175-207.

[Ca 83]. A. Carbery, *A weighted inequality for the maximal Bochner-Riesz operator on* $\mathbb{R}^2$, Trans. Amer. Math. Soc. **287** (1985), 673-680.

[Ca 67]. L. Carleson, *On the Littewood-Paley theorem*, Inst. Mittag-Leffler Report (1967).

[Ca-Sj 72]. L. Carleson und P. Sjölin, *Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc*, Studia Math. **44** (1972), 287-299.

[Ch1 85]. M. Christ, *On almost everywhere convergence of Bochner-Riesz means in higher dimensions*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 16-20.

[Ch2 85]. M. Christ, *On the restriction of the Fourier transform to curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **287** (1985), 223-238.

[Ch 87]. M. Christ, *Weak type endpoint bounds for Bochner-Riesz multipliers*, Rev. Mat. Iberoamericana **3** (1987), 25-31.

[Ch 88]. M. Christ, *Weak type (1,1) bounds for rough operators*, Ann. Math. **128** (1988), 19-42.

[Ch-D-RF 86]. M. Christ, J. Duoandikoetxea und J.L. Rubio de Francia, *Maximal operators related to the Radon transform and the Calderon- Zygmund method of rotations*, Duke Math. J. **53(1)** (1986), 189-209.

[Ch-So 88]. M. Christ und Ch. Sogge, *Weak type L^1 convergence of eigenfunction expansions for pseudodifferential operators*, Inv. Math. **94** (1988), 421-453.

[Cl 76]. J.L. Clerc, *Une formule de type Mehler-Heine pour les zonal d'un espace riemannien symétric*, Studia Math. **57** (1976), 27-36.

[Cl 81]. J.L. Clerc, *Le comportement à l'infini des fonctions de Bessel généralisées II*, Adv. in Math. **66** (1987), 31-61.

[Co 77]. A. Cordoba, *The multiplier problem for the polygon*, Ann. Math. **105** (1977), 581-589.

[Co 79]. A. Cordoba, *Multipliers of $F(L^p)$*, Lecture Notes in Math. **779** (1979), 162-177.

[Co1 81]. A. Cordoba, *Vector valued inequalities for multipliers*, Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund **1** (1983), 287-305, Wadsworth Inc., Belmont.

[Co2 81]. A. Cordoba, *Some remarks on the Littlewood-Paley theory*, Rend. Cir. Mat. Palermo **1** (1981), 75-80.

[Da 82]. H. Dappa, *Quasiradiale Fouriermultiplikatoren*, Dissertation, TH Darmstadt (1982).

[Dr 76]. B. Dreseler, *On summation processes of Fourier expansions for spherical functions*, Lecture Notes in Math. **571** (1976), 65-84.

Du-Ko-Va 83]. J.J Duistermaat, J.A.C. Kolk und V.S. Varadarajan, *Functions, Flows and oscillatory integrals on flag manifolds and conjugacy classes in real semisimple Lie groups*, Compositio Math. **49** (1983), 309-398.

[C. Fe 70]. C. Fefferman, *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math. **124** (1970), 9-36.

[C. Fe 71]. C. Fefferman, *The multiplier problem for the ball*, Ann. Math. **94** (1971), 330-336.

[C. Fe 73]. C. Fefferman, *A note on spherical summation multipliers*, Israel J. Math. **15** (1973), 44-53.

[Gr 81]. A. Greenleaf, *Principal curvature in harmonic analysis*, Ind. Univers. Math. J. **30** (1981), 519-537.

[Co-Gi-Tr 89]. L. Colzani, S. Giulini und G. Travaglini, *Sharp results for mean summability of Fourier series on compact Lie groups*, Math. Ann. **285** (1989), 75-83.

[Ha 57]. Harish-Chandra, *Fourier transform on a semisimple Lie algebra*, Amer. J. Math. **79** (1957), 193-257.

[He 78]. S. Helgason, "Differential geometrie, Lie groups and symmetric spaces," Academic Press, 1978.

[He 84]. S. Helgason, "Groups and geometric analysis," Academic Press, 1984.

[He 54]. C. Herz, *On the mean inversion of Fourier and Hankel transform*, Proc.

Nat. Acad. Sci. **40** (1954), 996-999.

[Hl 50]. E. Hlawka, *Über Integrale auf konvexen Körpern I*, Monatsh. Math **54** (1950), 1-36.

[Hö 60]. L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators on L^p spaces*, Acta Math. **104** (1960), 93-139.

[Hö 73]. L. Hörmander, *Oscillatory integrals and multipliers on $F L^p$*, Ark. Mat **11** (1973), 1-11.

[Jo 71]. M. Jodeit, *A note on Fourier multipliers*, Proc. Amer. Math. Soc. **27(2)** (1971), 423-424.

[John 34]. F. John, *Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **109** (1934), 488-520.

[Jou 83]. J.L. Journe, *Calderon-Zygmund operators, pseudodifferential operators and the Cauchy integral of Calderon*, Lecture Notes in Math. **994** (1983).

[Ke-To]. C. Kenig und P. Tomas, *On conjectures of Riviere and Strichartz*, Bull. Amer. Math. Soc. **1** (1979).

[Li 63]. W. Littman, *Fourver transform of surface-carried measures and differentiability of surface averages*, Bull. A.M.S. **68** (1963), 766-770.

[Mo 87]. G. Mockenhaupt, *Das Fouriersche Inversionsproblem unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften der Fourier-Transformation*, Diplomarbeit, GH Siegen (1987).

[Pr 79]. E. Prestini, *Restriction theorems for the Fourier transform to some manifolds in $\mathbf{R}^n$*, Proc. Symp. in Pure Math. 35 **1** (1979), 101-109.

[Pr 84]. E. Prestini, *Operators of Bochner-Riesz type for the helix*, Studia Math. **74** (1984),.

[Ru 83]. A. Ruiz, *L^p- Boundedness of a certain class of multipliers associated with curves on the plane II*, Proc. Amer. Math. Soc. **87(2)** (1983), 277-282.

[Sch 89]. U. Schmitz, *Differentiation von Integralen in $\mathbf{R}^n$*, Diplomarbeit, GH Siegen (1989).

[Sj 74]. P. Sjölin, *Fourier multipliers and estimates of the Fourier transform of measures carried by smooth curves in $\mathbf{R}^2$*, Studia Math. **51** (1974), 169-182.

[So 87]. C. D. Sogge, *On the convergence of Riesz means on compact manifolds*, Ann. Math. **126** (1987), 439-447.

[Sta 76]. R. Stanton, *Mean convergence of Fourier series on compact Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **218** (1976), 61-87.

[Sta-To 78]. R. Stanton und P. Tomas, *Polyhedral summability of Fourier series on compact Lie groups*, Amer. J. Math. **100(2)** (1978), 477-493.

[St 70]. E.M. Stein, "Singular integrals and differentiability properties of functions," Princeton Univrsity Press, 1970.

[St-W 71]. E.M. Stein und G. Weiss, "Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces," Princeton University Press, 1971.

[St 79]. E.M. Stein, *Problems in harmonic analysis*, Proc. Symp. in Pure Math. 35 **1** (1979), 3-19.

[St 86]. E.M. Stein, "Beijing lectures in harmonic analysis," Princeton University Press, 1986, pp. 307-355.

[Ta 85]. B.B. Taberner, *On the restriction of the Fourier transform to a conical surface*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), 321-332.

[To 74]. P. Tomas, *On radial Fourier multipliers*, Thesis, Cornell University (1974),.

[Wa 73]. N.R. Wallach, "Harmonic analysis on homogeneous spaces," Marcel Dekker, Inc.,, New York, 1973.

[Wa 44]. G.N. Watson, "A treatise on the theory of Bessel functions," Cambridge University Press, 1944.